



Hinweis:

78. Aufgabe 13.9 im Skriptum

79. Man betrachte die homogene Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
- (b) Welche Zustände sind rekurrent bzw. transient?
- (c) Bestimmen Sie den Rand R der Markovkette.
- (d) Berechnen Sie für jedes $i \in R$ die Absorptionswahrscheinlichkeiten $P_j(\{i\})$ für alle $j \in \mathcal{Z}$.
- (e) Berechnen Sie für jedes $j \in \mathcal{Z}$ die erwartete Schrittzahl bis zur Absorption in den Rand R .

80. Man betrachte die homogene Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

- (a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und zeigen Sie, daß der Zustand 0 rekurrent und aperiodisch ist.
- (b) Ist der Zustand 1 aperiodisch?
- (c) Zeigen Sie, daß der Zustand 0 positiv rekurrent ist.

81. Man betrachte die homogene Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Markovkette.
- (b) Bestimmen Sie die erwarteten Rückkehrzeiten m_i zu jedem Zustand $i \in \mathcal{Z}$.

82. Man betrachte die homogene Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Besuch des Zustands 0 koste 2 Euro, des Zustands 1 koste 3 Euro und der Besuch des Zustands 2 koste 5 Euro. Berechnen Sie (mit Hilfe der Grenzverteilung) die durchschnittlichen Kosten pro Zeiteinheit auf lange Sicht hin.