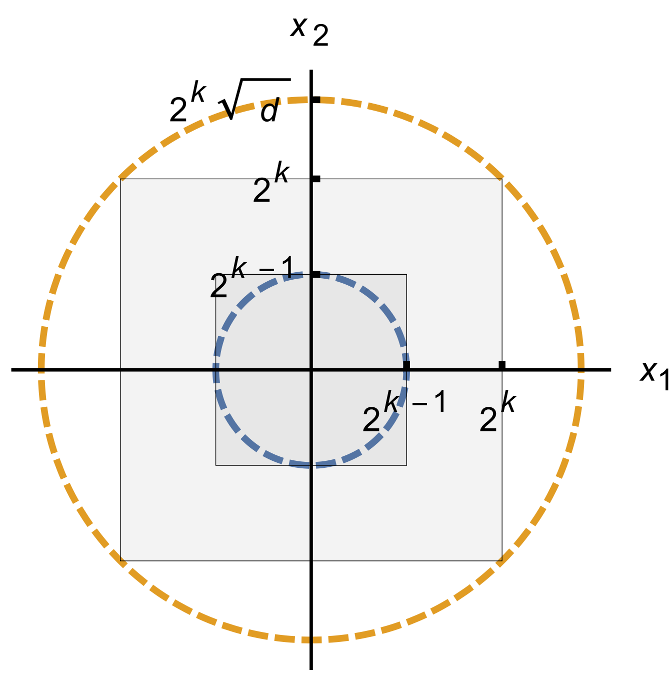
# Übungsblatt 09



47. Zeigen Sie: Es seien $a = (a_i)_{i\in I}$ und $b = (b_i)_{i\in I}$ Familien mit derselben Indexmenge. Die Familie $b$ sei summierbar und majorisiere die Familie $a$; d.h., es gelte $|a_i| \le |b_i|$ für alle $i \in I$. Dann ist auch $a$ summierbar.

48. Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ setzen Sie $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}$. Zeigen Sie: Für $s \in \mathbb{Q}$ ist die Familie $a : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, $a(\boldsymbol{n}) := \|\boldsymbol{n}\|^{-s}$, genau dann summierbar, wenn $s > d$ ist.

    Hinweis: Die Menge $\mathbb{Z}^d$ kann als die Menge der ganzzahligen Gitterpunkte interpretiert werden. Zeigen Sie, dass die Partialsummen der Familie $a$ auf den *Würfeln* $W_\ell := \{(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : |n_i| \le 2^\ell, i = 1, \ldots, d\}$, $\ell \in \mathbb{N}$, genau dann beschränkt bleiben, wenn $s > d$ gilt. Folgern Sie daraus, dass die Familie $a$ genau dann summierbar ist, wenn $s > d$. Für die Abschätzung von $\sum_{\boldsymbol{n}\in W_\ell} a(\boldsymbol{n})$ benützen Sie die Indexteilmengen $V_k := W_k \setminus W_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$. Finden Sie obere und untere Abschätzungen für die Anzahl der Gitterpunkte in $V_k$ und für $a(\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{n} \in V_k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung für $d = 2$.




49. Untersuchen Sie folgende Potenzreihen auf Konvergenz über $\mathbb{R}$:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(4+(-1)^n)^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$.

    *Hinweis: Bestimmen Sie den Konvergenzkreisradius $R$ (Skizze). Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzintervalls.*

50. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ komplexe Zahlen. Zeigen Sie die *Abelsche partielle Summationsformel*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k = A_n\, b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k\,(b_k - b_{k+1})\,, \qquad \text{wobei } A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Abelschen partiellen Summation, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$ konvergiert.

51. Für jede der folgenden Funktionen

$$\text{(i) } f(x) = \frac{1}{x}, \quad D(f) = (0, \infty), \qquad \text{(ii) } f(x) = \frac{x}{4 + x^2}, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

führen Sie folgendes Programm durch:

(a) Zeigen Sie mittels Folgenkriterium, dass $f$ stetig auf dem Definitionsbereich $D(f)$ ist.

(b) Bestimmen Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so, dass aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ ($x_0 \in D(f)$ fest) die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt.