Divergenz und Rotation von Vektorfeldern

Mit Hilfe des Nabla-Operators können nun zwei weitere wichtige elementare Operationen definiert werden, welche formal der Bildung des Skalarproduktes bzw. des äußeren Produktes von zwei Vektoren entsprechen.

Sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Dann heißt

$\nabla \cdot \vec{F} = \mathrm{div}\vec{F}$ die **Divergenz** von $\vec{F}$

$\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}\vec{F}$ die **Rotation** von $\vec{F}$.

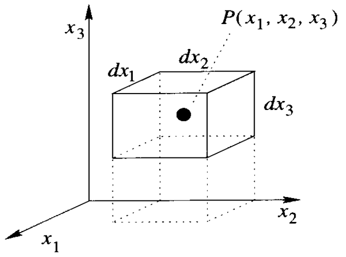
Dementsprechend ist $\nabla \cdot \vec{F} = \mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$ ein Skalarfeld.

$$\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} =$$

$= (\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1})\vec{e}_2 + (\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2})\vec{e}_3$ ist ein Vektorfeld.

Wir erwähnten vorher, dass $\vec{F} \cdot \vec{n} dA$ den Fluß von $\vec{F}$ durch das Flächenelement dA bezeichnet.

Damit wollen wir nun den "Nettodurchfluß" durch ein vorgegebenes Volumen bestimmen. Wir wählen um einen Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ einen kleinen Quader mit den Seitenlängen dx_1, dx_2, dx_3 und berechnen den Durchfluß bezüglich aller drei Raumrichtungen.



In x_1-Richtung liegt die "Eintrittsfläche" dx_2dx_3 (mit Normalenvektor $\vec{e}_1$) bei $x_1 - \frac{dx_1}{2}$, die "Austrittsfläche" bei $x_1 + \frac{dx_1}{2}$.

Als Nettoabfluß (Abfluß minus Zufluß) ergibt sich

$$\left[\vec{F}(x_1 + \tfrac{dx_1}{2}, x_2, x_3) \cdot \vec{e}_1 - \vec{F}(x_1 - \tfrac{dx_1}{2}, x_2, x_3) \cdot \vec{e}_1\right] dx_2dx_3 =$$

$$\left[F_1(x_1 + \tfrac{dx_1}{2}, x_2, x_3) - F_1(x_1 - \tfrac{dx_1}{2}, x_2, x_3)\right] dx_2dx_3 = \frac{\partial F_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} dx_2dx_3dx_1$$

wobei $F_1(x_1 \pm \frac{dx_1}{2}, x_2, x_3)$ durch seine Taylor-Entwicklung 1. Ordnung approximiert wurde.

Die Betrachtung der anderen Flächen liefert schließlich

$$\text{Nettoabfluß von } \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{div}\vec{F} dx_1dx_2dx_3$$

Der Nettoabfluß ist also Null, wenn innerhalb des Volumselementes $dx_1dx_2dx_3$ keine "Quelle" oder "Senke" liegt, - dann fließt ebenso viel ab wie zu.

Bemerkung. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also ein Maß für die Existenz von Quellen oder Senken. Gilt $\mathrm{div}\vec{F} = 0$, dann heißt das Vektorfeld $\vec{F}$ **quellenfrei**.

Beispiel. Betrachte ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x}$, wobei $\vec{\omega}$ ein konstanter Vektor ist. Dieses Vektorfeld beschreibt eine Drehung mit Drehachse $\vec{\omega}$ und Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$.

Dann ist $\vec{\omega} \times \vec{x} = (\omega_2x_3 - \omega_3x_2 \ , \ \omega_3x_1 - \omega_1x_3 \ , \ \omega_1x_2 - \omega_2x_1)$

und folglich $\mathrm{div}\vec{v} = 0$. $\vec{v}$ ist also quellenfrei.

Eine besondere Anwendung des Differentialoperators ∇ ergibt sich durch Bildung der Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes $\Phi(x_1, x_2, x_3)$.

$$\text{div grad}\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = \triangle\Phi$$

$\triangle$ heißt **Laplace-Operator** und kommt in zahlreichen Gleichungen der Physik vor, etwa der Wellengleichung. Im $\mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten gilt

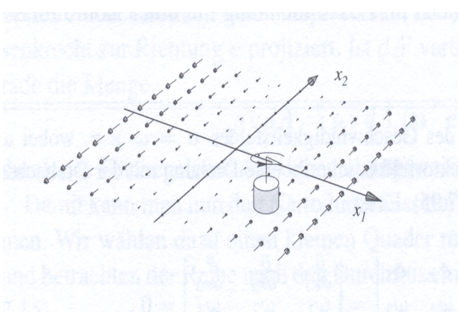
$$\triangle\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} \text{ , also}$$

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \text{ .}$$

Bemerkung. Der Nabla-Operator (wie auch der Laplace-Operator) ändern ihre Gestalt, wenn andere Koordinatensysteme betrachtet werden.

Die Bedeutung der Rotation kann folgendermaßen veranschaulicht werden: ist $\vec{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung und $\text{rot}\vec{v} \neq 0$, dann treten Drehbewegungen auf, d.h. ein "Korken" im Strömungsfeld wird sich drehen. In anderen Zusammenhängen spricht man auch von einer Wirbelbildung. Deshalb werden Vektorfelder mit nichtverschwindender Rotation auch **Wirbelfelder** genannt.

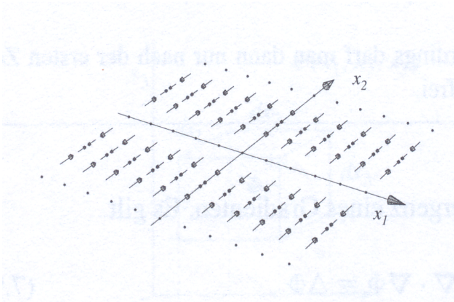
Beispiel 1. $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, 0)$



Hier wächst der Impuls der strömenden Flüssigkeit mit wachsenden Werten von x_1 . Die Rotation ist überall konstant und weist in x_3-Richtung.

$$\text{rot}\vec{v} = (0, 0, 1)$$

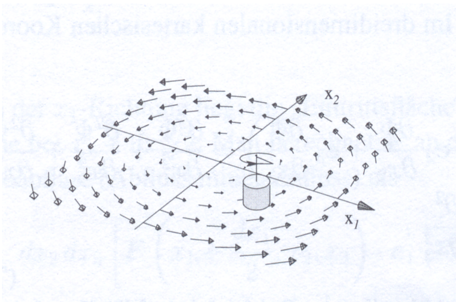
Beispiel 2. $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (0, \sin x_2, 0)$ (bzw. $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (0, f(x_2), 0)$)



Hier ändert sich die x_2-Komponente mit dem Wert von x_2, und damit ändert sich auch der Betrag der Geschwindigkeit. Dennoch entsteht keine Drehbewegung, denn es gilt $\text{rot}\vec{v} = \vec{0}$.

Beispiel 3. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x}$ mit $\vec{\omega} = \omega_0(0, 0, 1)$. Damit ist

$\vec{v} = \omega_0(-x_2, x_1, 0)$. Dies beschreibt die Geschwindigkeit einer Rotationsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 .



Es gilt $\text{div}\vec{v} = 0$ und $\text{rot}\vec{v} = (0, 0, 2\omega_0) = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$

Sei nun $\vec{F}$ ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Skalarfunktion Φ mit $\vec{F} = \text{grad}\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1})$. Dann ist

$$\text{rot}\vec{F} = (\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2 \partial x_3} , \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3 \partial x_1} , \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2}) .$$

Ist Φ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt offenbar $\text{rot grad}\Phi = \vec{0}$, bzw. $\nabla \times (\nabla\Phi) = \vec{0}$.

Konservative Vektorfelder sind also wirbelfrei.

Auf eine ebenso einfache Weise kann eine weitere wichtige Eigenschaft gezeigt werden ($\vec{F}$ zweimal stetig differenzierbar):

$$\text{div rot}\vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

Rechenregeln. Diese können durch Auswerten von linker und rechter Seite "relativ leicht" verifiziert werden.

Erwähnt sei dabei ein weiterer Differentialoperator, der aus einem Vektorfeld $\vec{F}$ und dem Nabla-Operator gewonnen werden kann:

$$(\vec{F} \cdot \nabla) = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Dieser Operator wirkt auf eine Skalarfunktion Φ mittels

$$(\vec{F} \cdot \nabla)\Phi = F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$$

und auf eine Vektorfunktion $\vec{G}$ mittels

$$(\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} = \begin{pmatrix} (\vec{F} \cdot \nabla)G_1 \\ (\vec{F} \cdot \nabla)G_2 \\ (\vec{F} \cdot \nabla)G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial G_1}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial G_1}{\partial x_3} \\ F_1 \frac{\partial G_2}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_3} \\ F_1 \frac{\partial G_3}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial G_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Der Laplace-Operator Δ ist ebenfalls für Vektorfunktionen $\vec{F}$ "komponentenweise" erklärt durch

$$\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{pmatrix}$$

- $\nabla \cdot (\Phi \vec{F}) = \nabla \Phi \cdot \vec{F} + \Phi(\nabla \cdot \vec{F})$
- $\nabla \times (\Phi \vec{F}) = \nabla \Phi \times \vec{F} + \Phi(\nabla \times \vec{F})$
- $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) == \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
- $\nabla \times \; (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$
- $\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) - \Delta \vec{G}$

Wir betrachten nun ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}$ mit Potenzial Φ , wobei wir annehmen, dass $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Dann gilt $F_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ für $i = 1, 2, 3$, und weiters $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ für $i, j = 1, 2, 3$.

Diese Bedingungen heißen allgemein **Integrabilitätsbedingungen** und bedeuten im $\mathbb{R}^3$ genau, dass $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

Unter gewissen Voraussetzungen (im Falle sogenannter einfach zusammenhängender Gebiete) gilt auch die Umkehrung:

ist $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$ dann ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld.

Beispiel. Sei $\vec{F} = (2x_1, x_3, x_2)$. Wie man sich leicht überzeugt, ist $\mathrm{rot}\vec{v} = \vec{0}$, also liegt eine konservative Kraft vor.

Für die gesuchte Skalarfunktion $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ gilt $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = F_1 = 2x_1$.

Integration nach x_1 liefert: $\Phi = x_1^2 + \varphi(x_2, x_3)$.

Wegen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = F_2 = x_3$ gilt dann $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = x_3$, und damit

$\varphi(x_2, x_3) = x_2 x_3 + \psi(x_3)$ bzw. $\Phi = x_1^2 + x_2 x_3 + \psi(x_3)$

Aus $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = F_3 = x_2$ folgt dann $x_2 + \psi'(x_3) = x_2$,

mithin $\psi'(x_3) = 0$ und $\psi(x_3) = c$.

Also ist $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3 + c$.

Bemerkung. Im Falle einer konservativen Kraft $\vec{F}$ kann die gesuchte Skalarfunktion Φ auch durch Auswertung eines Linienintegrals gewonnen werden. Es ist ja $\Phi(x_1, x_2, x_3) - \Phi(a, b, c)$ das Arbeitsintegral entlang eines Weges von (a, b, c) nach (x_1, x_2, x_3) .

Wählen wir im obigen Beispiel $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ und als Weg von $(0, 0, 0)$ nach (x_1, x_2, x_3) die drei Geradenstücke

$C_1 \ : \ t \mapsto (tx_1, 0, 0) \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad$ (von $(0, 0, 0)$ nach $(x_1, 0, 0)$)

$C_2 \ : \ t \mapsto (x_1, tx_2, 0) \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (\text{von} \ \ (x_1, 0, 0) \ \ \text{nach} \ \ (x_1, x_2, 0))$

$C_3 \ : \ t \mapsto (x_1, x_2, tx_3) \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (\text{von} \ \ (x_1, x_2, 0) \ \ \text{nach} \ \ (x_1, x_2, x_3))$

Dann ist $\Phi(x_1, x_2, x_3) - \Phi(0,0,0) =$

$$= \int\limits_{t=0}^{1} 2tx_1x_1 dt + \int\limits_{t=0}^{1} 0 \cdot x_2 dt + \int\limits_{t=0}^{1} x_2x_3 dt = x_1^2 + x_2x_3 \ .$$