Übungen Mathematik II, M

3. Übungsblatt

21.3.2013

1. Sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Falls nicht, welche von ihnen kann man als Linearkombinationen der anderen drei schreiben?

2. Gegeben seien die beiden Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für die Koordinatentransformation von der Basis B zur Basis C.

3. Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ bezüglich der Basis B dar.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie für jeden Eigenwert eine Basis des Eigenraumes.

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie für jeden Eigenwert eine Basis des Eigenraumes.

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

sowie für jeden Eigenwert eine Basis des Eigenraumes.

7. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

8. Wenden Sie auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an.

9. Wenden Sie auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an, einmal in der gegebenen Reihenfolge, einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ und einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren der Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und stellen Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren dar. Wie sieht die allgemeine Formel für $F^n\vec{x}$ aus?