

**Mathematik II SS 2015**  
**3. Übungsblatt**  
**26.3.2015**

**Aufgabe 3.1.** Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche Dimension hat der Untervektorraum  $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$  vom  $\mathbb{R}^4$ , welcher von den vier Vektoren erzeugt wird?
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von  $U$ .

**Aufgabe 3.2.** Wenden Sie auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an; und zwar einmal in der Reihenfolge  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , einmal in der Reihenfolge  $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$  und einmal in der Reihenfolge  $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$ .

**Aufgabe 3.3.** Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^4$  (dies dürfen Sie ohne weitere Rechnung annehmen). Bestimmen Sie die Koordinaten von  $\vec{x}$  bezüglich der Basis  $B$ .

**Aufgabe 3.4.** Gegeben sind die Basen  $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  und  $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  des  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $B$  und  $C$  tatsächlich Basen vom  $\mathbb{R}^3$  sind.
- (b) Berechnen Sie die Transformationsmatrix  $T$  von der Basis  $C$  auf die Basis  $B$ .

**Aufgabe 3.5.** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3.6.** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$