Mathematik II für Chemie

Aufgaben-Steinbruch, 10te Lieferung

Aufgabe 1. Sei B eine selbstadjungierte Matrix. Zeige, daß die Form

$$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle_B := x^\tau B\bar{y}$$

folgende Eigenschaften hat:

1. $\langle -,-\rangle_B$ ist linear im ersten Argument. D.h.:

$$\langle \alpha u + \beta v, w\rangle_B = \alpha\langle u,w\rangle_B + \beta\langle v,w\rangle_B$$

2. $\langle -,-\rangle_B$ ist *sesqi-linear* im zweiten Argument. D.h.:

$$\langle w, \alpha u + \beta v\rangle_B = \bar{\alpha}\langle w,u\rangle_B + \bar{\beta}\langle w,v\rangle_B$$

3. $\langle x,y\rangle_B = \overline{\langle y,x\rangle_B}$

Aufgabe 2. Betrachte den $\mathbb{R}^4$ als Raum von Polynomen

$$\mathbb{R}^4 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

und definiere die Form

$$\langle p(x), q(x)\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\ \mathrm{d}x$$

Beschreibe die Form als $\langle -,-\rangle_B$ für eine selbstadjungierte Matrix B. Finde eine Orthonormalbasis bezüglich dieser Form.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Matrizen sind normal? selbstadjungiert? unitär? Für die normalen Matrizen, finde eine Basis aus Eigenvektoren und rechne nach, daß Eigenräume zu unterschiedlichen Eigenwerten senkrecht zueinander stehen:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Ist

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

positiv definit?