# Übungen zur Vorlesung
# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
## Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Baňas — Übungsblatt 4
Dipl.-Math. Denny Otten — 06.11.2013

**Abgabe: Mittwoch, 13.11.2013, 12:00 Uhr** in das Postfach des Tutors.
Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

**Aufgabe 10:** [Landausymbol und experimentelle Konvergenzordnung]

Gegeben sei eine Fehlerfunktion $\varphi \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(h) = Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

für $0 \neq C \in \mathbb{R}$, $p > 0$ im Grenzwert $h \to 0$. Wie würden Sie die Konstanten $C$ und $p$ schätzen, wenn Ihnen nur zwei Werte $\varphi(h_1)$, $\varphi(h_2)$ für $h_1, h_2 > 0$ bekannt sind?
Bezeichnen $\tilde{C}(h_1,h_2)$, $\tilde{p}(h_1,h_2)$ diese Schätzungen, so zeige man für ein festes Schrittweitenverhältnis $q \in (0,1)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{p}(h,qh) &= p + \mathcal{O}(h) \\ \tilde{C}(h,qh) &= C + \mathcal{O}(h|\ln(h)|) \end{aligned}$$

für $h > 0$, $h \to 0$.

(6 Punkte)

Sei nun eine numerisch auswertbare Funktion $y \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ gegeben, die

$$y(h) = y_0 + Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ für } h \to 0$$

für gewisse $y_0, C \in \mathbb{R}$ und ein $p > 0$ erfüllt. Wie würden Sie die Konstanten $y_0$, $C$ und $p$ schätzen, wenn man für festes $q \in (0,1)$ die Werte $y(h)$, $y(qh)$ und $y(q^2h)$ kennt?

(2 Zusatzpunkte)

**Aufgabe 11:** [explizite Runge-Kutta-Verfahren und lineare AWA]

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und eine Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten

$$u' = Au \text{ für } t \geq 0,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass jedes explizite Runge-Kutta-Verfahren $m$-ter Stufe mit der Schrittweite $h$ für dieses System auf eine Rekursion

$$u^{j+1} = A_h u^j,\ j = 0,1,2,\dots \quad A_h \in \mathbb{R}^{n,n},$$

führt, wobei $A_h = q(hA)$ und $q$ ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist. Geben Sie für das Euler-Verfahren, die Methode von Heun und das klassische Runge-Kutta-Verfahren das jeweilige Polynom $q$ explizit an. Fällt Ihnen etwas auf?

(6 Punkte)

**Aufgabe 12:** [Euler-Verfahren und Heun-Verfahren]

Lösen Sie die Anfangswertprobleme

$$\text{a):}\ \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b):}\ \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. analytisch,

2. numerisch durch das explizite Euler–Verfahren und durch die Methode von Heun für die Schrittweiten $h_i = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 0, \ldots, 5$. Vergleichen Sie jeweils den Konvergenzfehler in der euklidischen Norm an der Stelle $t = 1$

   $$\varphi(h_i) = \|u_{h_i}(1) - u(1)\|_2,$$

   wobei $u$ die analytische und $u_{h_i}$ die jeweilige numerische Lösung zur Schrittweite $h_i$ bezeichnet. Zeichnen Sie dazu die Fehler im Bezug zur Schrittweite in ein Diagramm mit logarithmisch skalierten Achsen ein. Was fällt Ihnen auf?

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de. (6 Punkte)