Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dipl.-Math. Jens Kemper

Wintersemester 2009/10

Numerik II

5. Übungsblatt

Abgabe bis 24.11.09 um 12 Uhr in Postfach 34 in V3-128

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Programmiere die Mittelpunktregel (One-leg-Variante des Crank-Nicolson-Verfahrens) zur numerischen Lösung eines skalaren Anfangswertproblems. Verwende dabei eine Newton-Iteration zur Lösung der in jedem Zeitschritt auftretenden nichtlinearen Gleichungen (wähle als Startwert den Wert der Näherungslösung aus dem vorhergehenden Zeitschritt). Teste das Programm für das Anfangswertproblem

$$u'(t) = -u(t)^3\,, \quad t \in [0, 10]\,, \quad u(0) = 2\,,$$

und vergleiche die exakte Lösung mit den zu verschiedenen äquidistanten Zeitgittern berechneten numerischen Lösungen. Ist quadratische Konvergenz zu beobachten?

Zusatzaufgabe mit 6 Zusatzpunkten!

Seien $T > 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$). Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t))\,,\ t \in [0, T]\,, \quad u(0) = u_0\,,$$

wobei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dissipativ sei.

Betrachte die One-leg-Variante des ϑ-Verfahrens ($\vartheta \in [0, 1]$) auf einer äquidistanten Zerlegung von $[0, T]$ mit $t_n = n\tau$ ($\tau = T/N$, $N \in \mathbb{N}$) zur näherungsweisen Berechnung von $u^n \approx u(t_n)$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) bei gegebenem $u^0 \approx u_0$.

Zeige unter geeignet gewählten Voraussetzungen

a) die Wohldefiniertheit des Verfahrens,

b) die von der Wahl der Schrittweite unabhängige Beschränktheit der zeitdiskreten Lösung und gegebenenfalls ihrer diskreten Ableitung,

c) die stetige Abhängigkeit der zeitdiskreten Lösung vom Anfangswert,

d) eine Fehlerabschätzung erster Ordnung für den Fall $\vartheta \neq 1/2$,

e) eine Fehlerabschätzung zweiter Ordnung für den Fall $\vartheta = 1/2$.