Themen für Analysisseminar WS 2020/21

Alexander Grigoryan

Contents

1. Satz von Stone-Weierstraß und Anwendungen 2
2. Kritische Werte glatter Abbildungen und Satz von Sard 2
3. Theorie von orthogonalen Polynomen 3
4. Fixpunktsätze und Anwendungen 4
5. Satz von Baire und Anwendungen 5
6. Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension, Anwendungen auf Fraktalen 6
7. Nichtstandard-Analysis 7
8. Schwache Topologie und Anwendungen 8
9. Kompakte Operatoren, Fredholm-Alternative und Integralgleichungen 9
10. Dualraum eines normierten Vektorraums. Dualraum von L^p. 10
11. Rieszscher Darstellungssatz: Dualraum von $C(K)$ 12
12. Kompakte Teilmengen in $C(K)$. Satz von Arzelà-Ascoli und Anwendungen auf Differentialgleichungen 13
13. Konvexe Mengen und Satz von Krein-Milman 14
14. Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren 14
15. Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren und Anwendungen in Quantenmechanik 16
16. Fréchet und Gâteaux Ableitungen in Variationsrechnung 17
17. Fourier-Transformation und Anwendungen auf Differentialgleichungen 19
18. Schwache Ableitung, Sobolevsche Räume und Einbettungssätze 20
19. Distributionen und ihre Anwendungen auf Differentialgleichungen 21
20. Fourier-Reihen 23
21. Banachalgebren und Anwendung zum Spektralsatz 24
22. Satz von Picard-Lindelöf 25

*Literatur** 26

* Die Literaturliste ist nicht vollständig, man muss in der Bibliothek und Internet weiter recherchieren.

1. Satz von Stone-Weierstraß und Anwendungen

Literatur: [12], [34], [35].

Der klassische Approximationssatz von Weierstraß besagt folgendes: für jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ gibt es eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen die gegen f gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, d.h.

$$P_n \rightrightarrows f \ \text{ auf } \ [a,b] \quad \text{für } n\to\infty$$

oder, äquivalent,

$$\sup_{[a,b]}|P_n-f|\to 0 \ \text{ für } n\to\infty.$$

Der Satz von Stone-Weierstraß ist eine Verallgemeinerung davon. Sei K ein kompakter metrischer Raum. Die Menge $C(K)$ von allen stetigen Funktionen auf K ist nicht nur ein Vektorraum sondern auch eine *Algebra* da das Produkt zweier stetigen Funktion wieder stetig ist. Sei U eine *Unteralgebra* von $C(K)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) U trennt die Punkte von K, d.h. für alle $x,y\in K$, $x\neq y$ gibt es eine Funktion $u\in U$ mit $u(x)\neq u(y)$.
(2) U verschwindet in keinem Pinkt, d.h. für jedes $x\in K$ gibt es eine Funktion $u\in U$ mit $u(x)\neq 0$.

Dann liegt U dicht in $C(K)$ bezüglich sup-Norm, d.h. für jede Funktion $f\in C(K)$ gibt es eine Folge $\{u_n\}$ von Funktionen aus U mit

$$u_n \rightrightarrows f \ \text{ für } n\to\infty.$$

Der Approximationssatz von Weierstraß folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß wenn $K=[a,b]$ und U die Menge von allen Polynomen ist.

Die Aufgabe ist den Satz von Stone-Weierstraß mit Beweis und Anwendungen darzustellen. Alternativ kann man eine Menge von verschiedenen Beweisen des Approximationssatzes von Weierstraß darstellen (insbesondere mit Hilfe von dem Gesetz der großen Zahlen).

2. Kritische Werte glatter Abbildungen und Satz von Sard

Literatur: [4], [20], [24].

Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Ein Punkt $x\in\mathbb{R}^n$ heißt *kritisch* für f falls $f'(x)=0$, d.h. alle partielle Ableitungen $\partial f/\partial x_k$ verschwinden an der Stelle x. Bezeichnen wir mit S die Menge von allen kritischen Punkten von f.

Satz von Sard besagt, dass die Bildmenge $f(S)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist, d.h. das Lebesgue-Maß von $f(S)$ gleich 0 ist. Die kritische Menge S kann beliebig gross sein, zum Beispiel, für $f=\text{const}$ gilt $S=\mathbb{R}^n$, aber das Bild $f(S)$ ist immer eine "kleine" Menge (im Fall $f=\text{const}$ besteht $f(S)$ aus einem Punkt). Der Grund dafür ist, dass f' auf S verschwindet so dass die Bildmenge $f(S)$ ist gezwungen "klein" zu sein.

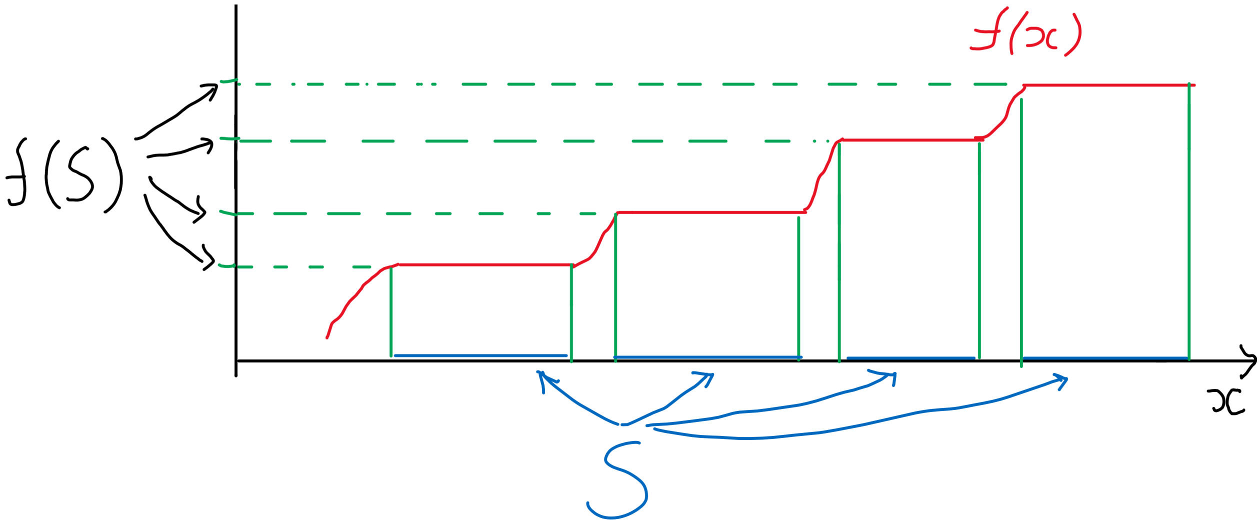

FIGURE 1. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Menge $f(S)$ von vier Punkten

Betrachten wir jetzt eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *kritisch* für f falls rang $f'(x) < k$ wobei f' die Jacobi Matrix ist und rang den Rang einer Matrix bezeichnet.

Satz von Sard lautet in diesem Fall ähnlich: die Bildmenge $f(S)$ der Menge S von kritischen Punkten von f ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^k$.

Eine von wichtigsten Anwendungen des Satzes von Sard ist wie folgt. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und betrachten wir für alle $t \in \mathbb{R}$ die Niveaumengen

$$M_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}.$$

Dann ist M_t für fast alle $t \in \mathbb{R}$ eine glatte Hyperfläche.

Die Aufgabe ist den Satz von Sard mit Beweis und Anwendungen darzustellen.

3. Theorie von orthogonalen Polynomen

Literatur: [1, Kapitel 22], [5], [27], [30, Ch. VII], [41].

Es geht um Chebyshev-, Legendre-, Hermite-, Laguerre- und andere Polynome. Gegeben sei eine positive stetige Funktion $\rho(x)$ auf einem Intervall (a, b) die auf (a, b) integrierbar ist, betrachten wir den Hilbertraum

$$L^2_\rho := L^2((a, b), \rho dx)$$

mit dem Maß ρdx. Das Skalarprodukt in diesem Hilbertraum ist wie folgt gegeben:

$$(f, g)_\rho = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

Die Funktion ρ heißt die Dichtefunktion. Alle Monome

$$1, x, x^2, ..., x^n, ...$$

liegen in L^2_ρ, und mit Hilfe von Gram-Schmidt Verfahren erhält man eine Folge von Polynomen

$$P_0, P_1, P_2, ..., P_n, ... \tag{1}$$

die orthogonal in L^2_ρ sind und $\deg P_n = n$. Die Folge $\{P_n\}$ ist eindeutig bis zur multiplikativen Konstante definiert und liefert eine orthogonal Basis in L^2_ρ.

Für Dichtefunktion $\rho \equiv 1$ auf dem Intervall $(-1, 1)$ erhält man die *Legendre-Polynome*

$$L_n(x) \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n,$$

z.B.

$$L_0 = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \quad ...$$

Mit der Dichtefunktion

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

bekommt man die *Tschebyschow-Polynome*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

mit der Dichtefunktion

$$\rho(x) = e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

bekommt man die Hermite-Polynome

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

usw.

Die orthogonalen Polynome $\{P_n\}$ haben viele interessante Eigenschaften, insbesondere alle Nullstellen von P_n sind immer reell und einfach, und sie liegen immer zwischen den Nullstellen von P_{n+1}. Die orthogonalen Polynome lösen bestimmte Differentialgleichungen und erfüllen bestimmte Rekurrenzrelationen.

Die Aufgabe ist die Theorie von orthogonalen Polynomen mit Beispielen und Beweisen darzustellen.

4. Fixpunktsätze und Anwendungen

Literatur: [**12**], [**16**], [**19**], [**33**].

Für eine Selbstabbildung $f : X \to X$ einer Menge X definiert man einen *Fixpunkt* als einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) = x$.

Aus Analysis I-II kennt man den Fixpunktsatz von Banach: eine Kontraktionsabbildung in einem vollständigen metrischen Raum hat immer einen Fixpunkt.

Die Aufgabe hier ist die fortgeschrittenen Fixpunktsätze mit Beweisen und Anwendungen darzustellen.

Die folgenden Fixpunktsätze werden häufig benutzt.

Der *Fixpunktsatz von Brouwer* besagt, dass eine stetige Selbstabbildung einer abgeschlossenen Kugel K in $\mathbb{R}^n$ immer einen Fixpunkt besitzt. Gleiches gilt für jede kompakte konvexe Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$. Für nicht-konvexe Mengen gilt den Fixpunktsatz nicht unbedingt: zum Beispiel, in einem Kreisring gibt es eine Selbstabbildung ohne Fixpunkt: eine Rotation.

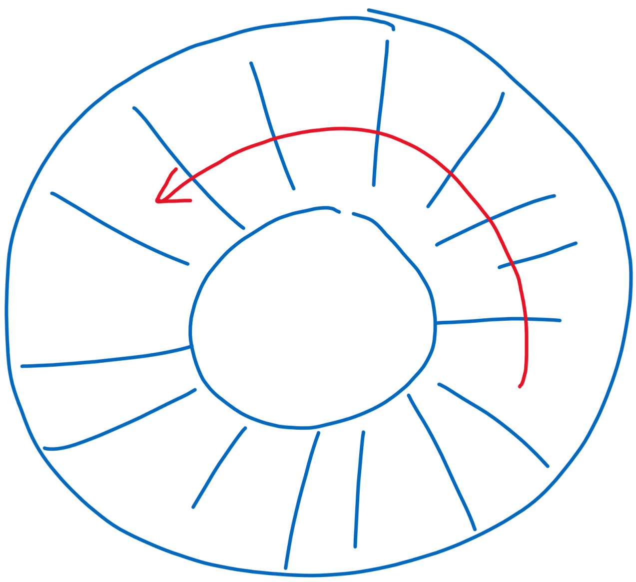

FIGURE 2. Eine Rotation des Kreisringes hat keinen Fixpunkt

Der *Fixpunktsatz von Schauder* ist eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Brouwer für ∞-dimensionale Räume. Sei V eine topologischer Vektorraum (möglicherweise ∞-dimensional). Sei K eine kompakte konvexe Teilmenge von V. Dann hat jede stetige Selbstabbildung von K einen Fixpunkt.

Man bemerke, dass eine abgeschlossene Kugel in ∞-dimensionalen Räumen nicht kompakt ist, obwohl konvex, und der Fixpunktsatz in dieser Situation nicht gilt. Zum Beispiel, für die Einheitskugel $K = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ im ∞-dimensionalen Hilbertraum H gibt es eine stetige Selbstabbildung ohne Fixpunkt. In der Tat, sei $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine orthonormale Basis in H. Definieren wir eine stetige lineare Abbildung $A : H \longrightarrow H$ mit $Ae_k = e_{k+1}$ and setzen

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|}{2} e_1 + Ax.$$

Dann ist $f|_K$ eine stetige Selbstabbildung der Kugel K ohne Fixpunkt.

Der Fixpunktsatz von Schauder hat eine Menge von Anwendungen in Analysis. Eine Modifizierung davon heißt *Fixpunktsatz von Leray-Schauder*, die in der Theorie von Differentialgleichungen verwendet wird.

Es gibt noch weitere Verallgemeinerung: der Fixpunktsatz von Kakutani für mehrwertige Abbildungen, der wichtige Anwendungen in Spieltheorie hat.

Die Aufgabe ist eine Reihe von Fixpunktsätzen mit Beweisen und Anwendungen darzustellen.

5. Satz von Baire und Anwendungen

Literatur: [**33**], [**36**], [**37**], [**43**].

Der Satz von Baire heißt auch bairescher Kategoriensatz. Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt *mager*, falls M gleich eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ ist, wobei jede Menge M_n nirgends dicht in X ist (d.h. der Abschluss $\overline{M_n}$ keine nicht-leere offene Menge enthält).

Der Satz von Baire besagt folgendes. Sei X eine vollständiger metrischer Raum. Ist M eine magere Teilmenge von X so liegt das Komplement $X \setminus M$ dicht in X, insbesondere ist $X \setminus M$ nicht leer.

Der Satz von Baire wird benutzt um die Existenz von Objekten mit bestimmten Eigenschaften zu beweisen. Eine von schönsten Anwendungen ist die folgende Aussage: die Menge von allen stetigen auf $[a, b]$ Funktionen die nirgends differenzierbar sind, liegt dicht in $C[a, b]$.

Man kennt stetige Funktionen die ein einige Punkte nicht differenzierbar sind, z.B. $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Aber es ist sehr schwierig eine Funktion $f \in C[a, b]$ vorzustellen, die in *keinem* Punkt differenzierbar ist. Erste Beispiele von solchen Funktionen wurden von Weierstraß entdeckt. Zum Beispiel, die folgende Funktion ist stetig aber nirgends differenzierbar:

$$f(x) = \sum \frac{1}{2^n} \cos(13^n \pi x).$$

Der Satz von Baire lässt uns die Existenz von solchen Funktionen viel einfacher beweisen.

Weitere Anwendungen von dem Satz von Baire:

(1) Existenz von Basis in Banachräumen;
(2) Das Prinzip von gleichmäßiger Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus);
(3) Satz von der inversen Abbildung: für jede stetige lineare bijektive Abbildung zwischen Banachräumen ist die inverse Abbildung auch stetig.

Die Aufgabe ist den Satz von Baire mit Beweis und Anwendungen darzustellen.

6. Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension, Anwendungen auf Fraktalen

Literatur: [**13**], [**14**], [**32**].

Hausdorff-Maß wird auf einem metrischen (M, d) Raum definiert. Für jede Menge $A \subset M$ and für positiven Zahlen α, δ setzen wir

$$H_{\alpha,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k)^\alpha : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \supset A \quad \text{und} \quad \operatorname{diam} B_k < \delta \right\}$$

wobei $\operatorname{diam}(B)$ der Durchmesser von B ist. Jetzt definieren wir das *äußere Hausdorff-Maß von Dimension* α mit

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{\alpha,\delta}(A).$$

Man beweist, dass H_α ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(M)$ von von Borel-Teilmengen von M ist.

Man kann auch beweisen, dass H_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit dem Lebesgue-Maß der Dimension n bis zur multiplikativen Konstante übereinstimmt.

Die Werte $H_\alpha(A)$ liegen immer in $[0, \infty]$ und, für eine fixierte A, sind monoton fallend in α. Man definiert die *Hausdorff-Dimension* $\dim_H(A)$ von A mit

$$\dim_H(A) := \inf\{\alpha : H_\alpha(A) = 0\} = \sup\{\alpha : H_\alpha(A) = \infty\}.$$

Zum Beispiel, für nicht-leere offene Menge A in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\dim_H(A) = n.$$

Für die Cantor-Mange

$$C = [0, 1] \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \setminus \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \setminus \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \setminus ...$$

gilt

$$\dim(C) = \log_3 2 = 0,63093...$$

Es gibt auch höherdimensionale Analoga von Cantor-Menge die als *Fraktale* bezeichnet werden (siehe z.B. die Bildern).

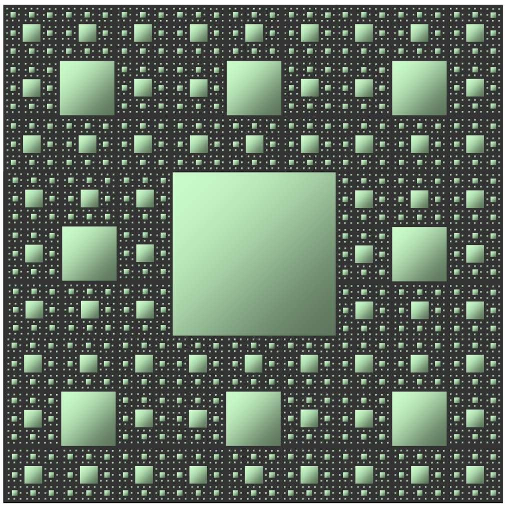

FIGURE 3. Sierpinski-Teppich

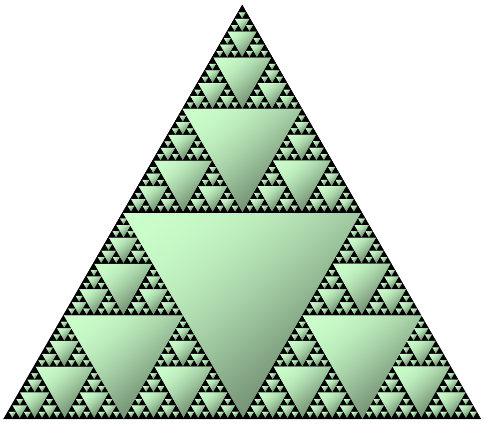

FIGURE 4. Sierpinski-Dreieck

Die Aufgabe ist die Theorie von Hausdorff-Maß und -Dimension darzustellen und zwar mit Anwendungen zur Bestimmung der Hausdorff-Dimension von Fraktalen.

7. Nichtstandard-Analysis

Literatur: [**12**], [**21**], [**28**], [**26**].

Aus Analysis I kennt man die ε-δ Definition von Limes als auch den Begriff von stetiger Funktion: eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig an einer Stelle x falls

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Insbesondere gilt für kleine Werte von dem Argumentinkrement Δx

$$f(x + \Delta x) \approx f(x).$$

Ähnliche Beobachtung gilt auch für den Begriff von Ableitung: für ein Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

und für kleine Werte von Δx gilt

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Nichtstandardanalysis ist ein Bereich der Mathematik, wo man die Bedeutung von $\approx$ präzise macht, aber nicht wie in Numerische Mathematik.

Man erweitern den Körper $\mathbb{R}$ zur Körper ${}^*\mathbb{R}$ von hyperreellen Zahlen wo zu jeder reellen Zahl x eine "Wolke" zugeordnet ist die aus hyperreellen Zahlen der Form $x + \Delta x$ besteht, wobei Δx so genannte *infinitesimale* Zahl ist. Für die infinitesimale Zahl Δx gilt

$$q < \Delta x < p$$

für alle reelle Zahlen $q < 0 < p$. Für hyperreelle Zahlen x, y definiert man die Relation $\approx$ mit

$$x \approx y \Leftrightarrow \ x - y \text{ ist infinitesimal.}$$

Es gibt ein Verfahren indem man jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (und andere Objekte die von reellen Zahlen abhängig sind) als eine Funktion $f :^* \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen kann. Dann bedeuten die Stetigkeit von f genau dass $f(x+\Delta x) \approx f(x)$ für alle infinitesimale Δx. Auch die Ableitung lässt sich rigorous mit Hilfe von (2) definieren.

Die Aufgabe ist die Theorie von Nichtstandardanalysis so weit wie möglich darzustellen und die üblichen Begriffe von Analysis I in der Sprache von Nichtstandardanalysis zu erklären. Ein großer Anteil von Nichtstandardanalysis besteht aus Mathematischer Logik – man sollte nicht zu tief in Details dieses Teils gehen.

8. Schwache Topologie und Anwendungen

Literatur: [**22**], [**35**].

Im Hilbertraum H gibt es ein Skalarprodukt (x, y) das eine Norm $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ induziert. Die Norm $\|x\|$ bestimmt die Normtopologie in H, insbesondere die Norm-Konvergenz: eine Folge $\{x_n\}$ aus H konvergiert gegen ein $x \in H$ bezüglich der Norm falls

$$\|x_n - x\| \to 0 \ \text{ für } n \to \infty. \tag{3}$$

Man schreibt in diesem Fall

$$x_n \to x \quad \text{oder} \quad x = \lim x_n.$$

Die Konvergenz bezüglich der Norm heißt auch *starke Konvergenz*. Im Gegenteil definiert man die schwache Konvergenz wie folgt: man sagt, dass x_n konvergiert gegen x schwach falls für alle $y \in H$

$$(x_n, y) \to (x, y) \ \text{ für } n \to \infty. \tag{4}$$

Schreibweise:

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{oder} \quad x = w\text{-}\lim x_n$$

wobei "w" für "weak" (schwach) steht.

Ist H endlichdimensional, so sind die starke und schwache Konvergenz äquivalent. Das ist der Grund, warum es in Analysis II keinen Begriff von schwacher Konvergenz gibt. Aber im Fall $\dim H = \infty$ ist die starke Konvergenz wirklich stärker als die schwache

Konvergenz: offensichtlich gilt (3)⇒(4) aber die Umkehrung gilt nicht. Dafür betrachten wir den Hilbertraum

$$l^2 = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

mit Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k.$$

In diesem Raum betrachten wir die Basiselemente

$$e_n = (0, ..., \overbrace{1}^{n\text{-te Pos}}, ..., 0, ...).$$

Die Folge $\{e_n\}$ konvergiert schwach gegen 0 da für jedes $y \in l^2$

$$(e_n, y) = y_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Allerdings konvergiert diese Folge stark nicht, da sie keine Cauchy-Folge ist: für $n \neq m$ gilt

$$\|e_n - e_m\|^2 = 2 \not\to 0.$$

Ähnliche Beispiele gibt es im Lebesgue-Raum L^2.

Der Grund für Einführung von schwacher Konvergenz ist dass eine (abgeschlossene) Kugel K im ∞-dimensionalen Hilbertraum nicht kompakt bezüglich der Normtopologie ist. Im Gegenteil ist K immer kompakt bezüglich der schwache Topologie.

Warum ist das wichtig? Der Begriff von Grenzwert wird in Analysis häufig benutzt um die Objekte (z.B. Funktionen) mit bestimmten gewünschten Eigenschaften zu konstruieren, und mit Hilfe von schwacher Konvergenz gelingt dies in Situationen when starke Konvergenz nicht funktioniert. Ganz viele Beispiele davon gibt es in der Theorie von Differentialgleichungen.

Insbesondere kann die Kompaktheit der Kugel benutzt werden um die Existenz einer Funktion $f \in L^2$ beweisen zu können die eine Maximumstelle einer Funktional $\mathcal{L}(f)$ in der Kugel $\{f \in L^2 : \|f\|_2 \leq 1\}$ ist. Da die Kugel schwach kompakt ist, dafür braucht man nur die schwache Stetigkeit von $\mathcal{L}$ zu beweisen.

Der Begriff von schwacher Konvergenz gibt es auch in Banachräumen. Sei X ein Banachraum und X^* der Dualraum von X. Eine Folge $\{f_n\}$ von Elementen von X^* konvergiert schwach gegen $f \in X^*$ wenn

$$(f_n, x) \to (f, x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man beweist, dass X^* immer schwach vollständig ist und dass eine Kugel in X^* immer schwach kompakt ist.

Die Aufgabe ist die Theorie von schwache Konvergenz in Hilbert-und Banachräumen darzustellen, insbesondere mit den Beweisen von schwachen Vollständigkeit und Kompaktheit, und Anwendungen anzugeben.

9. Kompakte Operatoren, Fredholm-Alternative und Integralgleichungen

Literatur: [7], [8], [29], [30, Ch. IX].

Sei X ein Banachraum. Ein linearer Operator $K : X \to X$ heißt kompakt wenn die Bildmenge $K(A)$ für jede beschränkte Menge $A \subset X$ relativ kompakt ist. Jeder kompakter Operator ist beschränkt aber die Umkehrung gilt nur in endlich-dimensionalen Räumen.

Wichtiges Beispiel von kompakten Operatoren ist ein Integraloperator im Raum $L^2[a,b]$:

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,y)\, f(y)\, dy$$

wobei die Funktion $k(x,y)$ der *Kern* von K ist. Unter bestimmten Bedingungen, z.B. wenn

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} k^2(x,y)\, dxdy < \infty,$$

ist der Operator K kompakt in L^2.

Sei K ein kompakter Operator im Hilbertraum H. Betrachten wir die Gleichung

$$x + Kx = y \tag{5}$$

wobei y bekannt ist und x – unbekannt. Dann gilt die Fredholm-Alternative: entweder ist die Gleichung (5) lösbar für alle $y \in H$ oder hat die Gleichung $x + Kx = 0$ mehrere Lösungen. Darüber hinaus ist der Unterraum $\ker(\mathrm{Id} + K)$ endlichdimensional, der Unterraum $\operatorname{im}(\mathrm{Id} + K)$ ist abgeschlossen, und es gilt die Identität

$$\dim \operatorname{im}(\mathrm{Id} + K)^{\perp} = \dim \ker(\mathrm{Id} + K). \tag{6}$$

Die Fredholm-Alternative ist eine Folgerung von (6): entweder $\operatorname{im}(\mathrm{Id} + K) = H$ (d.h. $\dim \operatorname{im}(\mathrm{Id} + K)^{\perp} = 0$) oder $\dim \ker(\mathrm{Id} + K) > 0$

Die Fredholm-Alternative ist in endlichdimensionalen Räumen aus der Linearen Algebra wohlbekannt. Sei $\dim H < \infty$. Bezeichnen wir $A = \mathrm{Id} + K$ und bemerken, dass im Fall $\det A \neq 0$ die Gleichung $Ax = y$ für alle y lösbar ist, während im Fall $\det A = 0$ die Gleichung $Ax = 0$ mehrere Lösungen hat.

Im Fall $\dim H = \infty$ gibt es keinen Begriff von Determinante, aber die Fredholm-Alternative lässt sich mit anderen Methoden beweisen. Darüber hinaus gilt sie in diesem Fall nicht für beliebige (beschränkte) Operatoren A sondern für eine kleinere Klasse von Operatoren, die $\mathrm{Id} + K$ enthält. Solche Operatoren heißen Fredholm-Operatoren.

Insbesondere gilt diese Theorie für die Integralgleichungen der Form

$$f(x) + \int_a^b k(x,y)\, f(y) = g(x)$$

wobei g gegeben ist und f unbekannt.

Die Aufgabe ist die Theorie von kompakten Operatoren und die Fredholm-Alternative darzustellen und Beispiele von Anwendung anzugeben.

10. Dualraum eines normierten Vektorraums. Dualraum von L^p.

Literatur: [**29**], [**43**].

Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Der Dualraum X^* von X ist der Raum von allen stetigen linearen Funktionalen auf X (manchmal wird der Dualraum auch mit X' bezeichnet). Dann ist X^* auch ein normierter Vektorraum: für jedes $\xi \in X^*$ definiert man die Norm von ξ mit

$$\|\xi\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\xi(x)}{\|x\|}.$$

Es ist bekannt, dass X^* immer ein Banachraum ist.

Zum Beispiel, im Fall wenn $X = H$ ein Hilbertraum ist, nach dem Rieszschen Darstellungssatz gilt immer

$$\xi(x) = (x, a)$$

für ein $a \in H$ wobei $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt in X ist. Somit erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H^* & \to & H \\ \xi & \mapsto & a \end{array}$$

die ein Isomorphismus von Hilberträumen ist. Daraus folgt, dass

$$H^* \cong H. \tag{7}$$

In allgemeiner Situation von normierten Vektorraum X ist es immer ein Problem den Dualraum X^* bis zum Isomorphismus zu bestimmen.

Fixieren wir ein Intervall $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Für jedes $p \in [1, \infty]$ definiert man das Lebesgue-Raum $L^p(J)$ wie folgt: im Fall $p < \infty$

$$L^p(J) = \left\{ f : J \to \mathbb{R} : \int_J |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_J |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

und im Fall $p = \infty$

$$L^\infty(J) = \left\{ f : J \to \mathbb{R} : \|f\|_\infty : \operatorname*{esssup}_J |f| < \infty \right\}.$$

Man beweist, dass für $p \in [0, \infty)$

$$(L^p)^* \cong L^q \tag{8}$$

wobei q die Hölder-Konjugierte zu p ist, d.h.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Insbesondere gelten $(L^1)^* \cong L^\infty$ und $(L^2)^* \cong L^2$ (wobei die letzte Relation auch aus (7) folgt).

Um (8) zu verstehen, bemerken wir, dass jede Funktion $\varphi \in L^q$ ein Funktional $\xi_\varphi \in (L^p)^*$ wie folgt bestimmt:

$$\xi_\varphi(f) = \int_J f\varphi dx \quad \text{für alle } f \in L^p,$$

was aus der Hölder-Ungleichung folgt und was eine Einbettung

$$\begin{array}{l} L^q \to (L^p)^* \\ \varphi \mapsto \xi_\varphi \end{array} \tag{9}$$

bestimmt. Die Relation (8) bedeutet, dass die Abbildung (9) ein Isomorphismus von Banachräumen ist.

Im Fall $p = \infty$ gilt (8) nicht, d.h.

$$(L^\infty)^* \ncong L^1.$$

Die Einbettung (9) gilt noch aber sie ist nicht surjektiv: es gibt in L^∞ Funktionale ξ die mit keinem ξ_φ übereinstimmen. Zum Beispiel, es gibt das Funktional $\mathrm{LIM} \in (L^\infty)^*$ genannt *Banachlimes*, mit

$$\mathrm{LIM}\, f = \lim_{x \to b} f(x)$$

für die Funktionen $f \in L^\infty(J)$ für die der Grenzwert $\lim_{x \to b} f(x)$ existiert.

Die Aufgabe ist die allgemeine Theorie von Dualräumen und die ausführliche Beschreibung des Dualraums $(L^p)^*$ darzustellen.

11. Rieszscher Darstellungssatz: Dualraum von $C(K)$

Literatur: [**29**], [**43**].

Sei K eine kompakter metrischer Raum. Betrachten wir den Banachraum $X = C(K)$ von stetigen reellwertigen Funktion auf K mit der sup-Norm. Die Beschreibung von dem Dualraum X^* ist in diesem Fall komplizierter.

Betrachten wir zuerst den Fall $K = [a, b]$ und geben zwei Beispiele von Elementen von $X^* = C[a, b]^*$ an:

(1) Die Abbildung
$$\lambda : f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$
ist ein stetiges lineares Funktional auf $C[a, b]$, somit $\lambda \in X^*$.

(2) Fixieren wir ein $c \in [a, b]$. Die Abbildung
$$\delta_c : f \mapsto f(c) \tag{11}$$
ist auch ein stetiges lineares Funktional auf $C[a, b]$, somit $\delta_c \in X^*$. Das Funktional δ_c heißt auch *δ-Funktion von Dirac.*

Sei Φ eine monotone steigende Funktion auf $[a, b]$. Dann bestimmt sie das Riemann-Stieltjes Integral
$$\lambda_\Phi : f \mapsto \int_a^b f(x)\,d\Phi(x) \tag{12}$$
das auch ein stetiges Funktional auf $C[a, b]$ ist, somit $\lambda_\Phi \in X^*$. Das Riemann Integral (10) ist ein spezieller Fall von (12) mit $\Phi(x) = x$, und die δ-Funktion (11) ist auch ein spezieller Fall von (12) mit
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$
Es gibt noch allgemeinere Version von dem Riemann-Stieltjes Integral when Φ eine Funktion von *beschränkte Variation* ist, d.h. when Φ eine Differenz zweier monotonen Funktion ist.

Der Rieszsche Darstellungssatz für den Raum $C[a, b]$ besagt, dass jedes Element von $C[a.b]^*$ die Form λ_Φ hat, wobei Φ eine Funktionen von beschränkten Variation ist.

Es gibt eine alternative Formulierung des Rieszschen Darstellungssatzes, die auch im allgemeinen Fall $X = C(K)$ gilt. Jedes Radon Maß σ auf K bestimmt das Lebesgue Integral
$$f \mapsto \int_K f\,d\sigma \tag{13}$$
und somit ein Element von $C(K)^*$. Zum Beispiel, im Fall (10) ist σ das Lebesgue-Maß auf $[a, b]$, und im Fall (11) ist σ das *Dirac-Maß*, dass sich auf einzigen Punkt c konzentriert.

Das Integral (13) lässt sich auch für *signiertes* Maß σ definieren, was eine Differenz zweier Maße ist.

Der Rieszsche Darstellungssatz in der allgemeinen Form besagt, dass jedes Element von $C(K)^*$ in der Form (13) für ein signiertes Maß σ darstellbar ist und zwar der Raum $C(K)^*$ isomorph zum Raum von allen signierten Radon Maßen auf K.

Die Aufgabe ist den Rieszschen Darstellungssatz für $C[a, b]$ bzw $C(K)$ mit ausführlichen Beweis darzustellen.

12. Kompakte Teilmengen in $C(K)$. Satz von Arzelà-Ascoli und Anwendungen auf Differentialgleichungen

Literatur: [29], [30, Ch. II], [35], [43]

Es ist aus Analysis II bekannt dass beschränkte Mengen in $\mathbb{R}^n$ präkompakt sind. Diese Eigenschaft wird häufig wie folgt benutzt: ist $\{x_k\}$ eine Folge aus einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, so hat diese Folge eine konvergente Teilfolge nach der Präkompaktheit von M.

Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ von unendlicher Dimension. Es ist immer wichtig zu verstehen welche Teilmengen von V präkompakt bezüglich der Norm-Topologie sind. Im Fall $\dim V = \infty$ sind die beschränkten Teilmengen von V nicht unbedingt präkompakt, z.B. eine Kugel im Hilbertraum ist nicht präkompakt.

Für eine Menge von Banachräumen gibt es eine explizite Beschreibung von präkompakten Teilmengen. Die Antwort ist bekannt, insbesondere, für den Raum $V = C(K)$ von stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum (K, d), wobei die Norm in $C(K)$ die sup-Norm ist.

Der Satz von Arzelà-Ascoli besagt folgendes: eine Teilmenge $M \subset C(K)$ ist genau dann präkompakt wenn M beschränkt und *gleichgradig stetig* ist, d.h. wenn für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $f \in M$ und alle $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$. Für *eine* Funktion f bedeutet diese Eigenschaft die gleichmäßige Stetigkeit die auf jeden Fall aus der Stetigkeit von f folgt. Aber diese Eigenschaft soll mit gleichen ε und δ für alle $f \in M$ gelten, so wird sie als gleichgradige Stetigkeit von M bezeichnet.

Der Satz von Arzelà-Ascoli wird insbesondere benutzt um Existenz von Lösungen der Differentialgleichungen zu beweisen. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x, t), \tag{14}$$

wobei f eine gegebene stetige Funktion in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist und $x(t)$ eine unbekannte Funktion. Der Satz von Peano besagt, dass es für jeden Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega$ eine Lösung von (14) mit der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0 \tag{15}$$

gibt. Für den Beweis konstruiert man eine Approximationsfolge $\{x_n\}$ von abschnittsweise linearen Funktionen wir folgt. Für eine Zerlegung $\{[t_i, t_{i+1}]\}$ des Intervalls $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ setzt man $x_n(t_0) = x_0$ und definiert induktiv $x(t)$ in den Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ mit

$$x_n(t) = x_n(t_i) + f(x_n(t_i), t_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Man zeigt, dass die Folge $\{x_n\}$ beschränkt und gleichgradig stetig ist, was aus der Beschränktheit von f in der Nähe von (x_0, t_0) folgt. Somit gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Man beweist, dass der Grenzwert $x(t) = \lim x_{n_k}(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (14)-(15) ist.

Bemerken wir, dass die Lösung von (14)-(15) ist nicht unbedingt eindeutig (aber für Lipschitz-stetige Funktion f ist die Lösung eindeutig nach dem Satz von Picard-Lindelöf).

Die Aufgabe ist den Satz von Arzelà-Ascoli und seine Anwendungen (inklusive den Satz von Peano) mit den Beweisen darzustellen.

13. Konvexe Mengen und Satz von Krein-Milman

Literatur: [29], [35], [43]

Sei V ein normierter Vektorraum und K eine konvexe Teilmenge von V. Ein Punkt $x \in K$ heißt *Extremalpunkt* von K wenn x in keiner Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten von K liegt außer der Endpunkte. Zum Beispiel, in einem Dreieck in der Ebene die Extremalpunkte sind die Ecken.

Die Menge von Extremalpunkten von K wird mit $ext\,(K)$ bezeichnet.

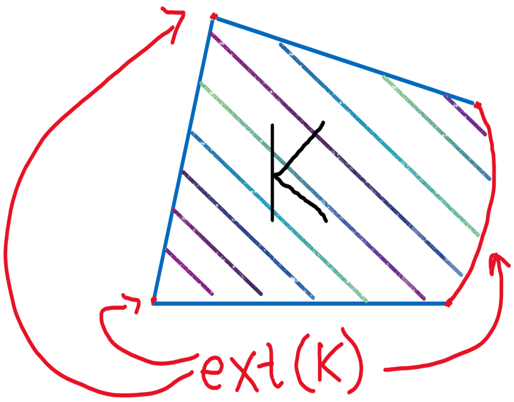

Figure 5. Die Menge $ext\,(K)$ von Extremalpunkten von K ist rot-farben gezeigt

Der Satz von Krein-Milman besagt folgendes: ist K eine konvexe kompakte Teilmenge von V so stimmt K mit der abgeschlossen konvexen Hülle von $ext\,(K)$.

Eine von Anwendungen von diesem Satz ist der Beweis der folgenden Aussage: der Banachraum c_0 von allen reellwertigen Folgen $\{x_n\}$ mit $\lim x_n = 0$ und mit der sup-Norm ist *kein* Dualraum.

Eine Erweiterung des Satzes von Krein-Milman ist der Satz von Choquet: für jedes $x_0 \in K$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $ext\,(K)$ so dass

$$x_0 = \int_{ext(K)} x d\mu,$$

d.h. x_0 das Baryzentrum von μ ist.

Die Aufgabe ist den Satz von Krein-Milman mit Beweis, Anwendungen und möglicherweise Erweiterungen darzustellen.

14. Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Literatur: [7], [8], [22], [29], [33], [35], [43].

Ein beschränkter linearer Operator A im Hilbertraum H heißt selbstadjungiert wenn $A^* = A$, was äquivalent zur Identität

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Ist A selbstadjungiert und kompakt, so gilt der Satz von Hilbert-Schmidt: für alle $x \in H$ gilt die Identität

$$A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_{K_n} x, \tag{16}$$

wobei $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ die Folge von allen nicht-Null Eigenwerten von A ist (mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), die Folge $\{K_n\}$ von Eigenräumen $K_n = \ker(A - \lambda_n \operatorname{Id})$ orthogonal ist, und P_K den orthogonalen Projektor auf K bezeichnet. Im Fall $\dim H < \infty$ ist die Darstellung (16) äquivalent zu Diagonalisierung von A.

Die Darstellung (16) bedeutet, dass A eine (endliche oder abzählbare) lineare Kombination von Projektoren ist.

Ohne Kompaktheit von A gilt diese Darstellung nicht. Es kann auch sein, dass A keinen Eigenwert hat. Zum Beispiel, betrachten wir im Raum $H = L^2(J)$ (wobei J ein Intervall ist) den Multiplikationsoperator

$$M_a f(t) = a(t) f(t) \tag{17}$$

mit einer beschränkten messbaren Funktion $a : J \to \mathbb{R}$. Dann ist M_a selbstadjungiert und beschränkt, aber nicht immer einen Eigenwert hat: z.B. im Fall $a(t) = t$ gibt es keinen Eigenwert.

Trotzdem lässt sich jeder beschränkte selbstadjungierte Operator A als eine linear Kombination von Projektoren darstellen, aber diese Kombination ist nicht abzählbar sondern kontinuierlich. Der Spektralsatz besagt dass solcher Operator sich in der folgenden Form darstellen lässt:

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda, \tag{18}$$

wobei $\{E_\lambda\}$ die *Spektralschar* von A ist, d.h. eine Familie von orthogonalen Projektoren in H die monoton steigend bezüglich λ ist und es gilt $E_\lambda = 0$ für $\lambda < \sigma(A)$, $E_\lambda = \operatorname{Id}$ für $\lambda > \sigma(A)$. Das Integral in (18) ist eine Vereinigung von Lebesgue-Stieltjes Integral.

Darüber hinaus, für stetige (und nicht nur für stetige) Funktionen f auf $\sigma(A)$ gilt

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda.$$

Somit ist der Spektralsatz mit dem Funktionalkalkül eng verbunden. In bestimmten Sinn sind diese zwei Sätze äquivalent.

Zum Beispiel, im Fall (16) hat man

$$E_\lambda = \sum_{\{n:\lambda_n \leq \lambda\}} P_{K_n}.$$

und für den Operator M_a aus (17) bestimmt man E_λ wie folgt

$$E_\lambda x(t) = \mathbf{1}_{\{a(t) \leq \lambda\}} x(t), \tag{19}$$

für alle $x \in L^2(J)$,weil

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda d\mathbf{1}_{\{a \leq \lambda\}} = a.$$

Bemerken wir, dass der Operator (19) der orthogonale Projektor auf den Unterraum

$$\left\{x \in L^2 : x(t) = 0 \ \text{ wenn } a(t) > \lambda\right\}$$

ist.

Eine andere Version von dem Spektralsatz besagt folgendes: für jeden beschränkten selbstadjungierten Operator A gibt es einen Maßraum (X, S, μ) und eine beschränkte messbare Funktion $a : X \to \mathbb{R}$ so that der Operator A unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator M_a in $L^2(X, \mu)$ ist.

Die Aufgabe ist mehrere Versionen des Spektralsatzes für beschränkten selbstadjungierten Operatoren mit Beweisen darzustellen.

15. Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren und Anwendungen in Quantenmechanik

Literatur: [7], [8], [22], [29], [33], [35], [43].

Das ist eine Fortsetzung von Thema 14. Ein *unbeschränkter* Operator A im Hilbertraum H ist eine lineare Abbildung

$$A : D \to H,$$

wobei D ein dicht liegender Unterraum von H ist. Im Fall $\|A\| < \infty$ lässt sich A auf H eindeutig fortsetzen, so dass A in diesem Fall ein beschränkter Operator in H ist.

Im Fall $\|A\| = \infty$ ist die Fortsetzung auf H normalerweise nicht möglich. Zum Beispiel, sei $H = L^2(J)$ wobei J ein kompaktes Intervall ist, und $A = \frac{d}{dx}$ – die Ableitung. Der Definitionsbereich ist $D = C^1(J)$ was ein dicht liegender Unterraum von $L^2(J)$ ist. Andere Differentialoperatoren lassen sich auch als unbeschränkte Operatoren betrachten.

Man definiert den adjungierten Operator A^* mit dem Definitionsbereich D^* wie folgt:

$$\begin{aligned} D^* &= \{y \in H : x \mapsto (Ax, y) \text{ ist ein beschränktes Funktional von } x \in D\} \\ &= \{y \in H : \exists a_y \in H \text{ so dass } (Ax, y) = (x, a_y) \text{ für alle } x \in D\} \end{aligned}$$

und $A^* y := a_y$ für alle $y \in D^*$. Insbesondere gilt die Identität

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } y \in D^*.$$

Ein Operator A heißt selbstadjungiert falls $D^* = D$ und $A^* = A$. Insbesondere ist A symmetrisch, d.h.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{für alle } x, y \in D,$$

aber die Symmetrie allein reicht für die Selbstadjungiertheit nicht.

Zum Beispiel, der Operator

$$A = i\frac{d}{dx}$$

im $H = L^2(J)$ mit dem Definitionsbereich $D = C_0^1(J)$ ist symmetrisch da für alle $f, g \in C_0^1(J)$ gilt

$$(Af, g) = \int_J i f'(x)\, \overline{g}(x)\, dx = -\int_J i f(x)\, \overline{g'(x)} dx = \int_J f(x)\, \overline{i g'(x)} dx = (f, Ag),$$

aber diese Operator nicht selbstadjungiert ist. Allerdings gibt es eine selbstadjungierte Fortsetzung von diesem Operator auf einen größeren Definitionsbereich.

Für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren gilt den Spektralsatz wie für beschränkten Operatoren. Ebenso gibt es das Funktionalkalkül. Als Beispiel von Anwendung, betrachten wir den Schrödinger-Operator in $L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

wobei $V(x)$ eine lokal integrierbare reellwertige Funktion ist die als Multiplikationsoperator in L^2 wirkt. Der anfängliche Definitionsbereich von $\mathcal{H}$ ist $D = C_0^2(\mathbb{R})$, und $\mathcal{H}$ in diesem Bereich ist symmetrisch, da für alle $f, g \in C_0^2(\mathbb{R})$ gilt

$$(\mathcal{H}f, g) = \int_{\mathbb{R}} (-f'' + Vf)\, \overline{g} dx = \int_{\mathbb{R}} f' \,\overline{g'} dx + \int_{\mathbb{R}} V f\, \overline{g}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f\, \overline{g''} dx + \int_{\mathbb{R}} V f\, \overline{g}\, dx = (f, \mathcal{H}g).$$

Man zeigt, dass, unter bestimmte Voraussetzungen über V, der Operator $\mathcal{H}$ sich auf selbstadjungierten Operator fortsetzen lässt. In diesem Fall kann man die Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathcal{H}\psi \tag{20}$$

lösen. Die unbekannte Funktion $\psi(x,t)$ in (20) ist eine Wellenfunktion, die die Bewegung eines Teilchens im Quantenmechanik beschreibt. Die Wellenfunktion ist komplexwertig, aber den Betrag $|\psi(x,t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von dem Teilchen an die Zeit t im Punkt x zu sein. Die Funktion $V(x)$ stellt in diesem Fall das Potential eines externen Feldes dar.

Für jedes t muss die Wellenfunktion die Identität

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1$$

erfüllen, da die gesamte Wahrscheinlichkeit immer gleich 1 ist. Insbesondere liegt $\psi(\cdot,t)$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Mit Hilfe von dem Funktionalkalkül kann man die Gleichung (20) wie folgt lösen. Setzen wir $\psi(t) := \psi(\cdot,t)$ und betrachten ψ als einen Weg in $L^2(\mathbb{R})$, der die Gleichung

$$\psi' = i\mathcal{H}\psi$$

erfüllt. Dann ist die Lösung

$$\psi(t) = \exp(i\mathcal{H}t)\,\psi(0),$$

wobei der Operator $\exp(i\mathcal{H}t)$ mit Hilfe vom Funktionalkalkül definiert wird.

Die Aufgabe ist die Theorie von unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren mit dem Spektralsatz und Anwendungen im Quantenmechanik darzustellen.

16. Fréchet und Gâteaux Ableitungen in Variationsrechnung

Literatur: [9], [8], [17], [30, Ch. X]

Die Begriffe von Fréchet und Gâteaux Ableitungen verallgemeinern die Begriffe der totalen bzw partiellen Ableitung in $\mathbb{R}^n$. Seien V und U zwei normierte Vektorräume. Eine Abbildung $F : V \to U$ ist an einer Stelle $x \in V$ Fréchet-differenzierbar wenn es eine beschränkte lineare Abbildung $A : V \to U$ gibt mit

$$F(x+h) - F(x) = Ah + o(h) \quad \text{für } h \to 0,$$

wobei $o(h)$ eine U-wertige Funktion von $h \in V$ mit

$$\frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

bezeichnet. Die Abbildung A heißt die Fréchet-Ableitung von F in x und wird mit $F'(x)$ bezeichnet.

Im Fall von $U = \mathbb{R}^m$ und $V = \mathbb{R}^n$ stimmt $F'(x)$ mit der Jacobi-Matrix von F in x.

Die Abbildung $F : V \to U$ heißt Gâteaux-differenzierbar in die Richtung $v \in V$ wenn der folgende Grenzwert existiert

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{F(x+tv) - F(x)}{t}.$$

Der Grenzwert $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ heißt die Gâteaux-Ableitung von F in die Richtung v in x.

Im Fall $V = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}$ und $v = e_k$ stimmt $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_k}$.

Man sagt, dass F in x Gâteaux-differenzierbar ist wenn $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ für alle $v \in V$ existiert. Ist F Fréchet-differenzierbar so ist F auch Gâteaux-differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x) = F'(x)\, v.$$

Viele Rechenregeln und Eigenschaften der Ableitungen aus Analysis I und II gelten auch für die Fréchet und Gâteaux Ableitungen. Zum Beispiel, hat eine Funktion $F : V \to \mathbb{R}$ eine Maximum- oder Minimumstelle x, so gilt $F'(x) = 0$ bzw $\frac{\partial F}{\partial v}(x) = 0$, vorausgesetzt dass F in x entsprechend differenzierbar ist.

Als Beispiel betrachten wir im Raum $V = C^1[a,b]$ das Funktional

$$F(x) = \int_a^b \mathcal{L}(t, x(t), x'(t))\, dt,$$

wobei $\mathcal{L}(t,x,y)$ eine stetige Funktion dreier Variablen und $x(t) \in C^1[a,b]$. Die Funktion $\mathcal{L}$ heißt die Lagrange-Funktion von F.

Ist $\mathcal{L}$ stetig differenzierbar, so zeigt man, dass $F : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ Gâteaux (und Fréchet) differenzierbar ist und für jedes $v \in C^1[a,b]$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial v}(x) &= \int_a^b \left(\partial_x \mathcal{L}(t,x,x')\, v(t) + \partial_y \mathcal{L}(t,x,x')\, v'(t)\right) dt \\ &= \int_a^b \left(\partial_x \mathcal{L}(t,x,x') - \frac{d}{dt}\partial_y \mathcal{L}(t,x,x')\right) v(t)\, dt + \left[\mathcal{L}(t,x,x')\, v(t)\right]_a^b. \qquad (21)\end{aligned}$$

Diese Identität kann benutzt werden um die Extremumstellen des Funktionals F zu bestimmen.

Betrachten wir das *Variationsproblem*: eine Funktion $x \in V$ mit den Randbedingungen

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$$

zu bestimmen die das Minimum bzw Maximum von F liefert. Dann muss $\frac{\partial F}{\partial v}$ gleich Null für alle v mit

$$v(a) = v(b) = 0$$

sein, was nach (21) ergibt

$$\int_a^b \left(\partial_x \mathcal{L}(t,x,x') - \frac{d}{dt}\partial_y \mathcal{L}(t,x,x')\right) v(t)\, dt = 0$$

und somit

$$\partial_x \mathcal{L}(t,x,x') - \frac{d}{dt}\partial_y \mathcal{L}(t,x,x') = 0. \qquad (22)$$

Die Gleichung (22) heißt die Euler-Lagrange-Gleichung für das Variationsproblem. Das ist eine Differentialgleichung mit unbekannten Funktion $x(t)$. Das Lösen von (22) ergibt kritische Funktionen $x(t)$ wo das Funktional F die Extremumstellen haben kann.

Die Aufgabe ist die Theorie von Fréchet und Gâteaux Ableitungen mit Anwendungen zur Variationsrechnung, insbesondere zur Euler-Lagrange-Gleichung, darzustellen und Beispiele anzugeben.

17. Fourier-Transformation und Anwendungen auf Differentialgleichungen

Literatur: [29], [30, Ch. VIII], [31], [38].

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert man ihre *Fourier-Transformierte* als eine neue Funktion $\widehat{f}$ wie folgt

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\xi\cdot x} dx$$

vorausgesetzt dass das Integral konvergiert (wobei $\xi\cdot x$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist und $i = \sqrt{-1}$). Die Abbildung $f \mapsto \widehat{f}$ heißt *Fourier-Transformation* und wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet so dass $\widehat{f} = \mathcal{F}f$.

Die *inverse Fourier-Transformation* $\mathcal{F}^{-1}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\, e^{i\xi\cdot x} d\xi.$$

Für bestimmte Klassen von Funktionen f sind die Abbildungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ wirklich gegenseitig invers, insbesondere

$$\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = \mathrm{Id}$$

(Rücktransformationsformel). Die Fourier-Transformation hat eine sehr wichtige Eigenschaft: für partielle Ableitungen ∂_{x_k} gilt

$$\mathcal{F}(\partial_{x_k} f) = i\xi_k(\mathcal{F}f)$$

vorausgesetzt, dass alle Glieder heir Sinn machen. In der Tat, mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\partial_{x_k} f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_k} f(x)\, e^{-i\xi\cdot x} dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \partial_{x_k} e^{-i\xi\cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(i\xi_k)\, e^{-i\xi\cdot x} dx = i\xi_k(\mathcal{F}f)(\xi).\end{aligned}$$

In anderen Wörter, das Bild des Differentialoperators ∂_{x_k} ist ein Multiplikationsoperator $i\xi_k$. Dieser Eigenschaft wird benutzt um Differentialgleichungen zu lösen.

Zum Beispiel, betrachten wir die Differentialgleichung

$$f'' + af' + bf = g$$

wobei g eine gegebene Funktion ist, a und b sind Konstanten und f eine unbekannte Funktion von einer Variable x ist. Die Fourier Transformation dieser Gleichung ist

$$\mathcal{F}(f'') + a\mathcal{F}(f') + b\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$$

was äquivalent zu

$$(i\xi)^2\mathcal{F}(f) + a(i\xi)\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$$

d.h.

$$\left(-\xi^2 + ia\xi + b\right)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$$

woraus folgt

$$\mathcal{F}(f) = \frac{\mathcal{F}(g)}{-\xi^2 + ia\xi + b}$$

und somit

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{-\xi^2 + ia\xi + b}\right).$$

Die Aufgabe ist die Theorie von Fourier-Transformation und ihre Anwendungen darzustellen, inklusive Rücktransformationsformel und andere Eigenschaften mit den Beweisen.

18. Schwache Ableitung, Sobolevsche Räume und Einbettungssätze

Literatur: [11], [19], [39].

Für alle Funktionen $f\in C^1(\mathbb{R})$ und $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R})$ gilt nach der partielle Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' dx.$$

Diese Identität bestimmt f' eindeutig: gilt für eine stetige Funktion g die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' dx \tag{23}$$

so stimmt$g$ mit f' überein.

Die Identität (23) can benutzt werden um die Ableitung von f auch für *nicht* differenzierbare Funktionen zu definieren. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Eine lokal integrierbare Funktion g heißt die *schwache Ableitung* von f auf $\mathbb{R}$ falls (23) für alle $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R})$ erfüllt ist. Die schwache Ableitung wird auch mit f' bezeichnet.

Zum Beispiel, die Funktion $f(x)=|x|$ hat die schwache Ableitung auf $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} -1, & x<0\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Analog definiert man schwache partielle Ableitungen. Ist f ein lokal integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, so definiert man die schwache partielle Ableitung $\partial_{x_k}f$ als eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ die die folgende Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_{x_k}f)\,\varphi\,dx=-\int_{\mathbb{R}^n} f\partial_{x_k}\varphi\,dx$$

für alle $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ erfüllt. Es gibt auch schwache Ableitung der höheren Ordnung. Sei $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ ein Multiindex. Man definiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ mit Hilfe von der Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n}(D^\alpha f)\,\varphi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} fD^\alpha\varphi\,dx$$

für alle $\varphi\in C_0^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ (oder $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$).

Es gibt die Rechenregeln für schwache Ableitungen die ähnlich den Rechenregeln für klassische Ableitungen. Zum Beispiel, es gilt

$$D^{\alpha+\beta}f=D^\alpha\left(D^\beta f\right),$$

vorausgesetzt dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Der *Sobolevsche Raum* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Verallgemeinerung des Lebesgue-Raum L^p und wird wie folgt definiert:

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^p(\mathbb{R}^n):D^\alpha f\in L^p(\mathbb{R}^n)\quad\text{für alle }\alpha\text{ mit }|\alpha|\leq k\ \},$$

wobei D^α die schwache Ableitung bezeichnet. Die Menge $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum und hat eine natürliche Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}}=\left(\sum_{\{\alpha:|\alpha|\leq k\}}\|D^\alpha f\|_{L^p}^p\right)^{1/p}. \tag{24}$$

Es ist wichtig, dass $W^{k,p}$ mit dieser Norm ein Banachraum ist. Bemerken wir: mit klassischer Definition von Ableitungen wäre dieser Raum nicht vollständig. Den Begriff von schwacher Ableitung braucht man um die Vollständigkeit von $W^{k,p}$ zu sichern.

Im Fall $p = 2$, im Raum $W^{k,2}$ ist die Norm (24) eine Skalarproduktnorm für das Skalarprodukt

$$(f,g)_{W^{k,2}} = \sum_{\{\alpha:|\alpha|\leq k\}} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2}.$$

Somit ist $W^{k,2}$ ein Hilbertraum. Man benutzt die Theorie von Hilberträumen um die Existenz von *schwachen* Lösingen im $W^{k,2}$ von partiellen Differentialgleichungen zu beweisen.

Der Raum $W^{k,p}$ ist ähnlich den Raum C^k von k-fach stetig differenzierbaren Funktionen. Für jede Funktion $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ stimmen ihre klassische Ableitungen mit den schwachen Ableitungen, und wir erhalten

$$C_0^k(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}.$$

Die Umkehrung wird von *Sobolevschen Einbettungssätzen* gegeben. Einer von Einbettungssätzen besagt folgendes: für alle $k > n/p + m$ gilt

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^m(\mathbb{R}^n).$$

Der andere Einbettungssatz ergibt

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

wobei $p < n$ und

$$q = \frac{pn}{n-p}.$$

Die Aufgabe ist die Theorie von schwachen Ableitungen und die Sobolevschen Einbettungssätze mit Beweisen darzustellen.

19. Distributionen und ihre Anwendungen auf Differentialgleichungen

Literatur: [**18**], [**25**], [**30**, Ch. IV], [**35**], [**42**].

Der Begriff von *Distribution* ist eine weitere Entwicklung der Idee von schwachen Ableitungen.

Eine *Distribution* in $\mathbb{R}^n$ (auch genannt *verallgemeinerte Funktion*) ist ein lineares stetiges Funktional auf dem topologischen Vektorraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ als Menge ist identisch zum Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ von allen ∞-fach differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern. Man definiert eine besondere Topologie in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so dass die Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so aussieht: eine Folge $\{\varphi_k\}$ von Funktionen aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gibt eine beschränkte Menge K so dass alle Träger $\operatorname{supp}\varphi_k$ in K liegen;
(2) Für jedes Multiindex α gilt $D^\alpha\varphi_k \rightrightarrows D^\alpha\varphi$ für $k \to \infty$ (wobei $\rightrightarrows$ die gleichmäßige Konvergenz bezeichnet).

Man bezeichnet die Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$. Der Dualraum von dem Raum $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wird mit $\mathcal{D}'$ bezeichnet. Somit sind Distributionen die Elemente von $\mathcal{D}'$.

Für $u \in \mathcal{D}'$ und $\varphi \in \mathcal{D}$ wird der Wert $u(\varphi)$ auch mit (u,φ) bezeichnet.

Jede Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ bestimmt eine Distribution (auch mit f bezeichnet) wie folgt:

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Solche Distributionen heißt regulär. Aber es gibt *singuläre* Distributionen die von keiner Funktion bestimmt werden, zum Beispiel die δ-Funktion von Dirac:

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0).$$

Darüber hinaus bestimmt jedes signiertes Radon Maß σ eine Distribution mit

$$(\sigma, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\sigma.$$

Eine von Vorteilen von Distributionen ist dass jede Distribution $u \in \mathcal{D}'$ immer alle Ableitung $D^\alpha u$ in $\mathcal{D}'$ hat! In der Tat, definiert man die *Distributionsableitung* $D^\alpha u$ für jedes Multiindex α mit

$$(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}$$

und bemerkt, dass die rechte Seite wirklich ein stetiges lineares Funktional von $\varphi \in \mathcal{D}$ ist.

Somit auch alle Funktionen $f \in L^1_{loc}$ und alle signierte Radon Maße haben immer alle Distributionsableitungen. Zum Beispiel, für die Heaviside-Funktion

$$\theta(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

gilt $\theta' = \delta$. Für jede monoton steigende Funktion f auf $\mathbb{R}$ ist die Distributionsableitung f' immer ein Maß.

Für Funktionen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ stimmen alle klassische Ableitungen $D^\alpha f$ der Ordnung $|\alpha| \leq m$ mit den Distributionsableitungen $D^\alpha f$ überein.

Man definiert den Begriff von Träger $\operatorname{supp} u$ von $u \in \mathcal{D}'$ wie folgt: $\operatorname{supp} u$ ist das Komplement der größten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$(u, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für Funktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ gibt es den Begriff von *Faltung* (auch genannt Konvolution): das ist die Funktion

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \psi(y) \, dy,$$

die auch in $\mathcal{D}$ liegt. Mit Hilfe von Dualität erweitert man die Faltung auf Distributionen: die Faltung $u * v$ ist für beliebige Distributionen u und v als eine Distribution definiert wird, vorausgesetzt, dass eine von u, v einen kompakten Träger hat. Es gilt die Identität

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v). \tag{25}$$

Die Faltung wird benutzt um lineare Differentialgleichungen wie folgt zu lösen. Betrachten wir einen linearen Differentialoperator der Ordnung m

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

wobei a_α Konstanten sind, und die Differentialgleichung

$$Lu = f \tag{26}$$

wobei f eine gegebene Funktion bzw Distribution ist und u unbekannt ist. Nehmen wir an, dass eine Lösung von

$$Lv = \delta$$

bekannt ist, wobei δ die δ-Funktion von Dirac ist. Die Lösing v heißt die *Fundamentallösung* des Operators L.In diesem Fall erhält man eine Lösung von (26) mit

$$u = v * f,$$

für jede Distribution f mit einem kompakten Träger, was aus (25) folgt.

Die Aufgabe ist die Theorie von Distributionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen darzustellen.

20. Fourier-Reihen

Literatur: [**27**], [**30**, Ch. VIII], [**40**], [**44**], [**45**]

Fourier-Reihe ist eine Funktionenreihe der Form

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

wobei a_k and b_k reelle Koeffizienten sind und $x \in \mathbb{R}$. Es wurde in der Vorlesung bewiesen dass die Folge

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \tag{27}$$

eine Orthogonalbasis in $L^2[0, 2\pi]$ ist. Somit gilt für jede Funktion $f \in L^2[0, 2\pi]$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{28}$$

wobei die Reihe in L^2-Norm konvergiert und

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} f(x) \sin nx \, dx.$$

Man kann fragen ob die Folge (28) auch punktweise konvergiert so dass sie für numerische Berechnung der Werte von $f(x)$ geeignet ist. Es gibt viele Ergebnisse in diese Richtung.

Die Aufgabe ist die Theorie von *punktweiser* Konvergenz der Fourier-Reihe (28) mit Beweisen und Beispielen darzustellen.

Zum Beispiel, folgendes ist bekannt. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist hier immer 2π-periodisch.

(1) Ist f stetig differenzierbar so gilt in (28) die gleichmäßige Konvergenz.
(2) Sei f lokal integrierbar. Angenommen, dass f rechtsseitig und linksseitig an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so konvergiert the Fourier-Reihe von f an x gegen $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. Wenn zusätzlich f an x stetig ist, so konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$.
(3) Sei f stetig. Die Reihe (28) muß nicht gegen $f(x)$ punktweise konvergieren, aber die Folge von Cesàro-Mittel von (28) immer gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert (Satz von Fejér).
(4) Die Fourier-Reihe (28) heißt *absolut konvergent* falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

In diesem Fall konvergiert die Fourier-Reihen gleichmäßig gegen f nach dem M-Test von Weierstraß. Sind die Fourier-Reihen von f and g absolut konvergent, so sind die Fourier-Reihen von fg und f/g auch absolut konvergent (Satz von Wiener[1]).

Es gibt auch mehrere Ergebnisse über die Konvergenz fast überall.

[1]Es gibt einen Beweis von dem Satz von Wiener mit Hilfe von Banachalgebren aus dem nächsten Abschnitt

21. Banachalgebren und Anwendung zum Spektralsatz

Literatur: [**3**], [**6**], [**30**, Suppl.]

Eine Banachalgebra ist ein Banachraum $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ wo es auch eine Multiplikation $a, b \mapsto ab$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Multiplikation ist assoziativ: $(ab)\,c = a\,(bc)$ für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$;
(2) Die Norm von $\mathcal{A}$ ist submultiplikativ, d.h. $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$.

Beispiele von Banachalgebren.

(1) Die Menge $\mathbb{C}$ ist eine Banachalgebra mit Multiplikation von komplexen Zahlen.
(2) Sei K ein kompakter metrischer Raum. Betrachten wir den Banachraum $C(K)$ mit der sup-Norm und mit punktweiser Multiplikation von Funktionen auf K:

$$fg\,(x) = f\,(x)\,g\,(x)\,.$$

Dann ist $C(K)$ eine Banachalgebra. In diesem Fall ist die Banachalgebra kommutativ und hat ein Einselement: die Funktion 1.
(3) Betrachten wir einen Hilbertraum H und den Banachraum $B(H)$ von beschränkten Operatoren in H mit der Operatornorm. Dann ist $B(H)$ mit Komposition von Operatoren eine Banachalgebra mit Einselement Id. Diese Banachalgebra ist nicht kommutativ.

Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement e. Ein $a \in \mathcal{A}$ heißt invertierbar falls es die Inverse $a^{-1} \in \mathcal{A}$ gibt, d.h. $a^{-1}a = a^{-1}a = e$. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ definiert man das Spectrum $\sigma(a)$ mit

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ ist nicht invertierbar}\}\,.$$

Man kann beweisen, dass $\sigma(a)$ eine nicht-leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist (Satz von Gelfand-Mazur). Das Spektralradius $r(a)$ von a wird als maximaler Wert von $|\lambda|$ mit $\lambda \in \sigma(a)$ definiert. Es gilt

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}\,.$$

Wie üblich bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^*$ den Dualraum des Banachraums $\mathcal{A}$. Ein Element $\varphi \in \mathcal{A}^*$ heißt multiplikativ falls

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Zum Beispiel, in Banachalgebra $\mathcal{A} = C(K)$ jeder Punkt $x \in K$ bestimmt ein multiplikatives Funktional δ_x (Dirac Delta-Funktion) mit $\delta_x(f) = f(x)$ da

$$\delta_x(fg) = (fg)(x) = f(x)\,g(x) = \delta_x(f)\,\delta_x(g)\,.$$

Die Menge von allen multiplikativen Funktionalen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Man kann zeigen, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{M}$ gilt $\|\varphi\| = 1$ wobei $\|\cdot\|$ die Norm in $\mathcal{A}^*$ ist. Da im Dualraum $\mathcal{A}^*$ die beschränkten Menge $*$-schwach präkompakt sind, so folgt es daraus, dass die Teilmenge $\mathcal{M}$ kompakt bezüglich $*$-schwacher Topologie ist.

Jedes $a \in \mathcal{A}$ lässt sich als ein Funktional F_a auf $\mathcal{M}$ wie folgt betrachten:

$$F_a(\varphi) := \varphi(a)\,.$$

Dann ist F_a eine stetige Funktion auf $\mathcal{M}$, d.h. $F_a \in C(\mathcal{M})$.

Hauptsatz. Die Abbildung $a \mapsto F_a$ (Gelfand-Transformation) bestimmt einen Homomorphismus der Algebra $\mathcal{A}$ nach der Algebra $C(\mathcal{M})$ von stetigen Funktionen auf $\mathcal{M}$. Unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen ist diese Abbildung sogar ein isometrischer Isomorphismus.

Es gibt viele Anwendungen von diesem Satz. Sei A ein beschränkter Operator im Hilbertraum H. Operator A heißt normal falls $AA^* = A^*A$ wobei A^* der adjungierte Operator ist (zum Beispiel, selbstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal). Sei $\mathcal{A}$ eine minimale abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$ die A und A^* enthält. Dann ist $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra und nach dem Hauptsatz ist sie isomorph zur Algebra $\mathcal{C}(\mathcal{M})$. Daraus kann man den Spektralsatz für normale Operatoren gewinnen, der den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren verallgemeinert.

Die Aufgabe ist die Theorie von Banachalgebren mit Beispielen und Beweisen präsentieren und Anwendungen für Spektralsatz anzugeben.

22. Satz von Picard-Lindelöf

Literatur: [**2**], [**10**], [**15**], [**23**]

Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Elemente von $\mathbb{R}^{n+1}$ werden mit (t, x) bezeichnet wobei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x' = f(t, x) \tag{29}$$

die man auch als Normalsystem bezeichnet. Hier $x(t)$ ist eine unbekannte Funktion und x' ist ihre Ableitung. Betrachten wir das Anfangswertproblem für (29):

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{30}$$

wobei (t_0, x_0) ein gegebener Punkt in Ω ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion $x(t)$ heißt eine Lösung von (30) wenn x auf I differenzierbar ist, für alle $t \in I$ gilt

$$(t, x(t)) \in \Omega \quad \text{und} \quad x'(t) = f(t, x(t)),$$

und

$$t_0 \in I \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0.$$

Satz von Picard-Lindelöf. Sei die Funktion $f(t, x)$ in Ω stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Dann gilt folgendes.

(a) Das Anfangswertproblem (30) hat eine Lösung für jedes $(t_0, x_0) \in \Omega$.

(b) Sind $x(t)$ und $y(t)$ zwei Lösungen von (30), dann gilt $x(t) = y(t)$ im gemeinsamen Definitionsbereich von x und y.

Im Fall wenn $f(t, x)$ nur stetig ist, gilt die Aussage (a) auch nach dem Satz von Peano, aber die Aussage (b) kann in diesem Fall nicht gelten.

Sei jetzt die Funktion $f(t, x)$ linear in x, d.h.

$$f(t, x) = A(t)x + B(t),$$

wobei $A(t)$ eine $n \times n$ Matrix-wertige Funktion auf einem Intervall I ist, und $B(t)$ eine Vektor-wertige Funktion auf I mit Werten in $\mathbb{R}^n$.

Satz von Picard-Lindelöf für lineares System. Sind $A(t)$ und $B(t)$ stetig auf I, so hat das Anfangswertproblem (30) eine einzige Lösung $x(t)$ auf dem Intervall I.

Der Unterschied zwischen diesen zwei Sätzen ist dass im allgemeinen Fall die Lösung $x(t)$ in einer kleinen Umgebung von t_0 existiert, während im linearen Fall die Lösung auf dem ganzen Intervall I existiert.

Die Aufgabe ist die Beweise von den beiden Sätzen mit den Methoden der Funktionalanalysis zu präsentieren und die Folgerungen für die skalaren Differentialgleichungen höherer Ordnungen

$$x^{(n)} = F\left(t, x, .x', .., x^{(n-1)}\right)$$

$$x\left(t_0\right) = x_0, \quad x'\left(t_0\right) = x_1, ..., \ x^{(n-1)}\left(t_0\right) = x_{n-1}$$

zu geben. Beispiele und weitere Entwicklung der Theorie sind auch gewünscht (z.B. Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Lösung bezüglich Parameter).

*Literatur**

[1] **Abramowitz M. Stegun I. A.**, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,* New York, Dover, 1965.
[2] **Amann H.**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen,* de Gruyter Lehrbüche, 1995.
[3] **Bonsall, F.F., Duncan, J.**, *Complete Normed Algebras,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 80, Springer, Berlin, 1973.
[4] **Bröcker Th.**, *Analysis II,* Spektrum Lehrbuch, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
[5] **Chihara, Theodore Seio**, *An Introduction to Orthogonal Polynomials,* Gordon and Breach, New York, 1978.
[6] **Conway J.**, *A course in functional analysis,* Graduate Texts in Mathematics 96, Springer-Verlag, New York, 1990.
[7] **Courant R., Hilbert D.**, *Methoden der mathematischen Physik Band 1,* Berlin: Springer, 1924.
[8] **Courant R., Hilbert D.**, *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1,* Interscience Publishers, 1953.
[9] **Dieudonné J.**, *Foundations of modern analysis,* Boston, MA: Academic Press, 1969.
[10] **Endl, K., Luh W.**, *Analysis III,* Akademische Verlagsgesellschaft, 1974.
[11] **Evans L.C.**, *Partial differential equations,* Graduate Studies in Mathematics 19, AMS, Providence, RI, 1997.
[12] **Evers K.**, *Mengentheoretische Topologie,* https://www.math.uni-rostock.de/~evers/Topologie/top.pdf
[13] **Falconer K. J.**, *Fractal geometry,* John Wiley and Sons, 1990.
[14] **Federer H.**, *Geometric measure theory,* Berlin: Springer, 1969.
[15] **Forster, O.**, *Analysis 2,* Vieweg Studium, 1984.
[16] **Franz, Wolfgang**, *Topologie I,* 1960.
[17] **Gelfand I.M., Fomin S. V.**, *Calculus of Variations,* USA: Dover, 2000.
[18] **Gelfand, I.M., Shilov, G.E**, *Generalized functions,* Academic Press, 1966.
[19] **Gilbarg D., Trudinger N.**, *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer, 2001.
[20] **Guillemin, V., Pollack A.**, *Differential Topology,* Prentice Hall, 1974.
[21] **Hermoso J.G.**, Nonstandard Analysis and the Hyperreals, https://mathforum.org/dr.math/faq/analysis_hyperreals.html
[22] **Heuser H.**, *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung. 3. Auflage.,* Teubner-Verlag, 1992.
[23] **Heuser H.**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Teubner-Verlag, 2004.
[24] **Hirsch M. W.**, Differential Topology, Springer-Verlag, New York, 1976.
[25] **Hörmander L.**, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I,* Springer, 1983.
[26] **Hurd A.E., Loeb P.A.**, *An introduction to Non-standard real Analysis,* Academic Press, 1985.
[27] **Jackson, Dunham**, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials,* New York: Dover, 2004.
[28] **Keisler H.J.**, Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach, https://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-509.pdf https://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-09-04-19.pdf
[29] **Kirillov A.A., Gvishiani A.D.**, *Theorems and problems in functional analysis,* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
[30] **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.**, *Elements of the theory of functions and functional analysis,* Dover Books on Mathematics, 1999.
[31] **Lighthill M. J.**, *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions,* Cambridge University Press, 2003.
[32] **Mandelbrot B.B.**, *Die fraktale Geometrie der Natur,* Birkhäuser,

[33] **Reed M., Simon B.**, *Methods of modern mathematical physics. I: Functional Analysis,* Academic Press, 1972.
[34] **Rudin W.**, *Principles of mathematical analysis,* McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.
[35] **Rudin W.**, *Functional analysis,* McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
[36] **Schechter, Eric**, *Handbook of Analysis and its Foundations,* Academic Press,
[37] **Steen L.A., Seebach J. A., Jr.**, *Counterexamples in Topology,* Springer-Verlag, New York, 1978,
[38] **Stein E. M., Shakarchi R.**, *Fourier Analysis: An Introduction,* Princeton University Press, 2003.
[39] **Stein, E.**, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton Univ. Press, 1970.
[40] **Stromberg, K. R.**, *Introduction to classical analysis,* Wadsworth International Group, 1981.
[41] **Szegö G.**, *Orthogonal Polynomials,* Colloquium Publications - American Mathematical Society, 1939.
[42] **Vladimirov V. S.**, *Methods of the theory of generalized functions,* Analytical Methods and Special Functions 6, Taylor & Francis, London, 2002.
[43] **Werner, Dirk**, *Funktionalanalysis,* Springer Verlag, 2005.
[44] **Zorich V.A.**, *Analysis II,* Springer-Verlag,
[45] **Zygmund, A.**, *Trigonometric series,* Cambridge University Press, 2002.