LINEARE ALGEBRA II
10. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir nehmen an, dass f diagonalisierbar und nilpotent ist. Zeigen Sie: $f = 0$.

Aufgabe 2. Es sei K entweder der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $\langle -,-\rangle\colon V \times V \to K$ eine Abbildung, die linear in der ersten Komponente ist und $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ für alle $x,y \in V$ erfüllt. Angenommen, es gibt eine Basis $v_1,\dots,v_n$ von V mit

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}\ , \quad i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Zeigen Sie: Dann ist $\langle -,-\rangle$ ein Skalarprodukt (und eine solche Basis heißt Orthonormalbasis, vgl. VL).

(b) Es sei $V = K^n$ und $\langle -,-\rangle$ das Standardskalarprodukt. Sei $B \in \mathcal{M}_n(K)$ invertierbar. Es sei $A = B^t\overline{B}$ und

$$\langle -,-\rangle_A\colon K^n \times K^n \to K, \quad \langle x,y\rangle_A = x^t A\overline{y}.$$

So ist $\langle -,-\rangle_A$ ein Skalarprodukt (vgl. A2 auf PB9). Zeigen Sie, dass $B^{-1}e_1,\dots,B^{-1}e_n$ eine Orthonormalbasis für $(K^n, \langle -,-\rangle_A)$ ist.

Aufgabe 3. Es sei $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ und $A = B^t\overline{B}$. Nach A2 ist $v_1 = B^{-1}e_1 = e_1,\ v_2 = B^{-1}e_2 = -ie_1 + e_2$ eine ON-Basis für das Skalarprodukt $\langle -,-\rangle_A$. Sei $v = 2e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$.
1. Berechnen Sie $\langle v, v_j\rangle_A$, $j = 1,2$.
2. Schreiben Sie dann v als Linearkombination von v_1 und v_2.
3. Berechnen Sie $|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle_A}$.

Hinweis: Nach VL, Satz (2.4) gilt $v = \sum_{j=1}^{\dim V} \langle v, v_j\rangle v_j$ und $|v|^2 = \sum_{j=1}^{\dim V} |\langle v, v_j\rangle|^2$.

Aufgabe 4. Es sei K entweder der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir betrachten K^3 mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis e_1, e_2, e_3.

(a) Es sei $K = \mathbb{R}$. Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren aus der Vorlesung auf die folgenden Vektoren an:

$$a_1 = e_1 + e_2, \quad a_2 = e_2 + e_3, \quad a_3 = e_1 + e_3$$

Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren noch einmal auf die drei Vektoren von vorher an, aber ändern Sie die Reihenfolge. ändert sich die ON-Basis? Was passiert, falls man mit einer Folge mit $a_1 = a_2$ startet?

(b) Es sei $K = \mathbb{C}$. Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren auf die drei Vektoren an:

$$a_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad a_2 = 2ie_2, \quad a_3 = 2ie_3$$