LINEARE ALGEBRA II
12. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei $SO(3) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AA^T = E_3, \det(A) = 1\}$. Zeigen Sie:

(a) Jeder Eigenwert einer orthogonalen Matrix ist entweder $+1$ oder -1.
(b) Falls $A \in SO(3)$ gilt, so hat A einen Eigenvektor zum Eigenwert 1.
Hinweis: Ein Polynom vom Grad 3 in $\mathbb{R}[X]$ hat mindestens eine Nullstelle. Wenden Sie dies auf das charakteristische Polynom an.
Folgern Sie, es gibt eine ON-Basis B in $\mathbb{R}^3$, so dass die darstellende Matrix der linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x) = Ax$ von der folgenden Form ist:
$$M(f;B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix}, \quad D(t) \in O(2),\ \det(D(t)) = 1.$$
(c) Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis vom $\mathbb{R}^3$. Ist $A \in SO(3)$, so sind (v_1, v_2, v_3) und (Av_1, Av_2, Av_3) gleich orientiert.
(d) Es gilt $A(v \times w) = Av \times Aw$ für alle $A \in SO(3)$, $v, w \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ heißt positiv definit, wenn $\langle -, - \rangle_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt ist.

(a) Es sei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie: Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit $A = B^T B$ gibt.
Hinweis: Falls A positiv definit ist, gibt es nach dem Orthonormalisierungsverfahren eine ON-Basis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle -, - \rangle_A$.
(b) Zeigen Sie: Falls A positiv definit ist, so gilt $\det(A) > 0$. Falls A positiv definit ist, so auch A^{-1}.
(c) Zeigen Sie: Falls λ ein Eigenwert von A ist, so ist $\lambda > 0$.
Hinweis: Starten Sie mit einem Eigenvektor v zu einem Eigenwert μ von A^{-1} und berechnen Sie $\langle v, \mu v \rangle_A$.
(d) Zeigen Sie: Falls A positiv definit und orthogonal ist, so gilt $A = E_n$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Volumen des Spates im $\mathbb{R}^3$, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird: $v_1 = (1, 1, 1)$, $\quad v_2 = (0, 1, 3)$, $\quad v_3 = (-1, 2, 0)$.

Aufgabe 4. Für $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sei $A^* = \overline{A}^T$. Wir sagen A ist unitär, falls $AA^* = E_n$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Die Zeilen (und die Spalten) einer unitären Matrix bilden eine ON-Basis bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{C}^n$.
(b) Angenommen, es gibt eine Diagonalmatrix D und eine unitäre Matrix U mit $A = UDU^*$. Zeigen Sie: Die Spalten von U sind eine ON-Basis aus Eigenvektoren von A und es gilt $AA^* = A^*A$.