Spieß

# 10. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 15.1.08

**Aufgabe 1.** Sei $R$ ein Ring und

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_3} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_4} \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 \end{array}$$

ein kommutatives Digramm von $R$-Moduln mit exakten Zeilen. Zeigen Sie: Ist $f_1$ surjektiv, $f_3$ bijektiv und $f_4$ injektiv, so ist $f_2$ surjektiv.

**Aufgabe 2.** Sei $R$ ein Ring und $X = \operatorname{Spec} R$. Sei $M$ ein $R$-Modul und $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_R(M, \mathcal{N}(X)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{N})$$

gibt.

**Aufgabe 3.** Seien $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ und $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ graduierte Ringe und $\phi : A \to B$ ein Ringepimorphismus mit $\phi(A_n) = B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\phi$ auf natürliche Weise eine abgeschlossene Immersion

$$j : \operatorname{Proj}(B) \longrightarrow \operatorname{Proj}(A)$$

induziert.

**Aufgabe 4.** Sei $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ ein noethersches graduierter Ring und $f \in A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$ ein homogenes Element. Zeigen Sie, dass $A_{(f)}$ noethersch ist.