LA2 - ÜBUNGSBLATT 2 - LÖSUNG

MIMA STANOJKOVSKI

Aufgabe 1. Sei $\beta : V \times W \to K$ eine nicht ausgeartete K-bilinearform und seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V und W. Sei B die Strukturmatrix bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ und sei $(h, k) \in \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(W)$. Seien $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h)$ und $C = (c_{ij}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(k)$. Wir zeigen, dass

(1) $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h^\wedge) = B^{-1}A^{\mathrm{t}}B$ und
(2) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(^\wedge k) = (B^{-1})^{\mathrm{t}}C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}$.

Beweis: (1) Sei $\gamma : V \times W \to K$ definiert durch $(v, w) \mapsto \beta(h(v), w)$ und sei M die Strukturmatrix von γ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann ist $h^\wedge$ gleich $\beta_2^{-1} \circ \gamma_2$. Wir rechnen erst M aus. Für jede $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$m_{ij} = \beta(h(v_i), w_j) = \beta\big(\sum_{l=1}^{n} a_{li}v_l, w_j\big) = \sum_{l=1}^{n} a_{li}\beta(v_l, w_j) = \sum_{l=1}^{n} a_{li}b_{lj}$$

und so gilt es $M = A^{\mathrm{t}}B$. Aus Aufgabe 1 von ÜB1 wissen wir, dass

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}}(\beta_2) = B \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}}(\gamma_2) = M$$

und aus LA1 folgt es, dass

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h^\wedge) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}^*}(\beta_2^{-1})M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}}(\gamma_2) = B^{-1}A^{\mathrm{t}}B.$$

(2) Sei $\theta : V \times W \to K$ definiert durch $(v, w) \mapsto \beta(v, k(w))$ und sei N die Strukturmatrix von θ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann ist $^\wedge k$ gleich $\beta_1^{-1} \circ \theta_1$. Für jede $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$n_{ij} = \beta(v_i, k(w_j)) = \beta\big(v_i, \sum_{l=1}^{n} c_{lj}w_l\big) = \sum_{l=1}^{n} c_{lj}\beta(v_i, w_l) = \sum_{l=1}^{n} c_{lj}b_{il} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}c_{lj}$$

und so ist $N = BC$. Aus Aufgabe 1 von ÜB1 wissen wir, dass

$$M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}}(\beta_1) = B^{\mathrm{t}} \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}}(\theta_1) = N^{\mathrm{t}}$$

und aus LA1 folgt es, dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(^\wedge k) = M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}}(\beta_1^{-1})M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}^*}(\theta_1) = (B^{\mathrm{t}})^{-1}C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}.$$

□

Aufgabe 2. (1) Seien $\beta : V \times V \to K$ eine symmetrische nicht ausgeartete K-Bilinearform und U ein Unterraum von V. Die Abbildung β induziert eine nicht ausgeartete K-Bilinearform $U \times V/U^{\perp} \to K$ und darum gilt

$$\dim U = \dim(V/U^{\perp}) = \dim V - \dim U^{\perp}.$$

(2a) Sei $\beta : V \times V \to K$ die Abbildung $(u, v) \mapsto 0$, die eine symmetrische K-Bilinearform ist. So ist $V^{\perp} = V$ und, wenn $V \neq 0$, gilt

$$\dim V + \dim V^{\perp} = 2 \dim V \neq \dim V.$$

(2b) Sei $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to K$ die Bilinearform deren Strukturmatrix bzgl. der Standardbasis

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Da $\det(B) = -1 \neq 0$ ist β nicht ausgeartet, aber $\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle e_1 \rangle$.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf V. Wir zeigen, dass eine $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, bezüglich derer die Strukturmatrix von q die Gestalt

$$\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

hat.

Beweis: Wir beweisen das per Induktion nach n.

Induktionanfang: $n = 0$. Ok.

Induktionschritt: wir nehmen $n > 0$ und wir nehmen an, dass jeder quadratischer Raum (W, q') über K, mit $\dim W = n - 1$ und q' nicht ausgeartet, eine Basis hat sodass die Strukturmatrix von q' die Gestalt $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ hat. Da $n > 0$ ist, ist $q \neq 0$ und darum gibt es ein Element $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$. Sei jetzt $W = \{v\}^{\perp}$, so gilt:

(1) $\dim W = n - 1$ (aus Aufgabe 2),
(2) v ist kein Element von W (weil $q(v) \neq 0$) und
(3) $q' = q_{|W} : W \to K$ ist nicht ausgeartet
(zB: Beweis durch Widerspruch, benutz (1) und (2)).

Es folgt aus der Induktionsannahme, dass eine Basis $\mathcal{C}$ von W existiert sodass die Strukturmatrix von q' bzgl. $\mathcal{C}$ die Gestalt $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ hat. Wir definieren jetzt $v' = v/(\sqrt{|q(v)|})$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \{v'\}$ (wir stellen v' erst wenn $q(v) > 0$ ist, anders stellen wir v' letztes). Dann hat die Strukturmatrix von q bezüglich $\mathcal{B}$ die Gestalt $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. $\square$

Aufgabe 4. Seien $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ und $C \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen $T \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ aus sodass die Matrizen $T^{\mathrm{t}}BT$ und $S^{\mathrm{t}}CS$ diagonal sind.

(1) Sei β die Bilinearform $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deren Strukturmatrix bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B}$ die Matrix B ist. Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass $\dim\{e_1\}^\perp = 1$ ist und es ist nicht schwierig zu zeigen dass $\{e_1\}^\perp = \mathbb{R}(-3,1)$. Sei $\mathcal{C} = (e_1, -3e_1 + e_2)$, das eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. So ist die Strukturmatrix Δ von β bzgl. $\mathcal{C}$ diagonal und

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir jetzt

$$T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nehmen, folgt es aus Satz 1.9 der VL, dass $\Delta = T^{\mathrm{t}}BT$. Inbesonders sind die Signatur und der Rang von B gleich 1.

(2) Sei γ die Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deren Strukturmatrix bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B}$ die Matrix C ist. Dann ist $\gamma(e_1, e_1) = -1$ und das Orthogonale Komplement von $\{e_1\}$ hat aus Aufgabe 2 Dimension 2. Wir berechnen, dass

$$\{e_1\}^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y - x\}.$$

Das Element $b_2 = (2,1,0)$ gehört zu $\{e_1\}^\perp$ und hat selbs ein Orthogonales Komplement von Dimension 2, i.e.

$$\{b_2\}^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3y - z = 0\}.$$

Inbesonderes ist $\gamma(b_2, b_2) \neq 0$. Außerdem, da ist

$$\{e_1\}^\perp \cap \{b_2\}^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - x = z = 3y\}$$

ist das Element $b_3 = (1,-1,-3)$ in den Komplementen von beiden e_1 und b_2. Sei jetzt $\mathcal{C} = \{e_1, b_2, b_3\}$, das eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Dann ist die Strukturmatrix von γ bzgl. $\mathcal{C}$ gleich

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir jetzt

$$S = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

nehmen, folgt es aus Satz 1.9 der VL, dass $\Sigma = S^{\mathrm{t}}CS$. Die Signatur von C ist 1 und der Rang von C ist 2.