LA 2 SS 09 Zettel 8

Nils Mahrt

22. Juni 2009

4. Aufgabe

Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom χ_A irreduzibel ist. Sei

$$\Gamma_A = \{B \in M(n \times n, K) | BA = AB\}.$$

Zunächst soll gezeigt werden, dass Γ_A ein Ring ist. Da die Verknüpfungen von $M(n \times n, K)$ induziert werden, sind die Axiome eines Unterrings zu überprüfen:

- Abgeschlossenheit bezüglich $+$: Seien $B, C \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

  $$(B + C)A = BA + CA = AB + AC = A(B + C).$$

  Also ist $B + C \in M(n \times n, K)$.

- Abgeschlossenheit bezüglich $\cdot$: Seien $B, C \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

  $$BCA = BAC = ABC.$$

  Also ist $BC \in M(n \times n, K)$.

- Inverse bezüglich $+$: Sei $B \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

  $$(-B)A = -1(BA) = -1(AB) = A(-1)B = A(-B).$$

  Also ist $-B \in M(n \times n, K)$.

- $0, 1 \in \Gamma_A$ ist klar, weil die Nullmatrix und die Einheitsmatrix mit allen anderen Matrizen kommutieren.

Somit ist Γ_A ein Ring.

Nun soll gezeigt werden, dass $L(E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}) \subseteq \Gamma_A$ gilt. Seien $\lambda_i \in K$. Dann ist zu zeigen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i \in \Gamma_A.$$

Es gilt
$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i\right) A = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^{i+1} = A\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i\right),$$
was zu beweisen war.

Als nächstes ist zu zeigen, dass $E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ linear unabhängig sind. Seien $\lambda_i \in K$ mit:
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i = 0.$$
Dann ist das Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$ ein Vielfaches des Minimalpolynoms und hat höchstens Grad $n-1$. Das Minimalpolynom von A ist aber gleich dem charakteristischen Polynom vom Grad n. Daher muss p das Nullpolynom sein. Somit sind $E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ linear unabhängig.

Nun ist zu zeigen, dass jede Matix $0 \neq C \in \Gamma_A$ invertierbar ist. Sei $C \in \Gamma_A$ nicht invertierbar, dann gibt es einen Vektor $0 \neq v \in K^n$ mit $Cv = 0$. Nach Aufgabe 3b sind die Vektoren $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ linear unabhängig. Diese Vektoren liegen ebenfalls im Kern von C, weil für jedes i gilt:
$$C(A^i v) = A^i C v = A^i 0 = 0.$$
Also hat der Kern von C die Dimension n, damit folgt, dass $C = 0$ ist. Die Behauptung folgt per Kontraposition.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass $\Gamma_A \subseteq L(E_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ gilt. Seien $C \in \Gamma_A$ und $0 \neq v \in K^n$. Nach Aufgabe 3b ist $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ eine Basis des K^n. Somit gibt es $\lambda_i \in K$ mit $Cv = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i v$. Der Kern der Matrix $C - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i$ enthält also v und ist somit nicht trivial. Somit folgt, dass diese Matrix nach Aufgabenteil b die Nullmatrix ist. Es gilt also: $C = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Bisher wurde gezeigt, dass Γ_A ein Ring ist. Es ist noch zu zeigen, dass Γ_A eine Körper ist. Dazu soll zunächst das Kommutativgesetz gezeigt werden. Seien $B, C \in \Gamma_A$. Dann gibt es $\lambda_i \in K$ mit $C = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i$ und es gilt:
$$BC = B\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i B A^i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i B = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i\right) B = CB.$$

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass die Elemente in $\Gamma_A \backslash \{0\}$ invertierbar sind. Sei $C \in \Gamma_A \backslash \{0\}$ Nach Aufgabenteil b ist C invertierbar. Es gibt also $C^{-1} \in M(n \times n, K)$. Es ist zu zeigen, dass $C^{-1} \in \Gamma_A$ gilt:
$$C^{-1}A = C^{-1}ACC^{-1} = C^{-1}CAC^{-1} = AC^{-1}$$
Damit ist Γ_A ein Körper.

Das Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ wurde in Aufgabe 3, Zettel 5 behandelt. Der Körper Γ_A ist isomorph zu $\mathbb{C}$.