Übungsaufgaben 9.

Verschiedenes

1. Sei K ein Körper, sei $A \in M(n \times n, K)$. Nach Satz $1''''$ gibt es invertierbare Matrizen P, Q mit Koeffizienten in K, sodass PAQ eine Diagonalmatrix mit Diagonalkoeffizienten 0 und 1 ist. Folgere daraus: Es gibt $B \in M(n \times n, K)$ mit $ABA = A$.

(Eine Einzeilenaufgabe!)

2. (a) Gesucht ist eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$, die modulo 3 und 5 invertierbar, modulo 7, 11, 13 aber nicht invertierbar ist.

(Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{Z})$, und ist p eine Primzahl, so sagt man, dass A **modulo** p invertierbar ist, wenn die Matrix $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ invertierbar ist; dabei ist $\overline{a}_{ij}$ die Restklasse von a_{ij} modulo p.)

(b) Zeige: Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar (über $\mathbb{Z}$), wenn A modulo jeder Primzahl invertierbar ist.

3. Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Zeige: Genau dann besitzt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ von Null verschiedene nilpotente Elemente, wenn es eine Primzahl p gibt mit $p^2|n$.

4. Zeige: Sei K ein Körper, seien a_i $(0 \leq i \leq n)$ paarweise verschiedene Elemente von K.

(a) Zeige: Es gibt ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad n mit $f(a_0) = 1$ und $f(a_i) = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

(b) Zeige: Sind $b_0, \dots, b_n$ beliebige Elemente in K, so gibt es ein Polynom $g \in K[T]$ mit $\operatorname{grad} g \leq n$, sodass $g(a_i) = b_i$, für $0 \leq i \leq n$, gilt, und dieses g ist eindeutig bestimmt.

5. Folgere aus 4.: Sei K ein Körper mit q Elementen (q eine natürliche Zahl, natürlich ≥ 2). Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Polynome f mit Koeffizienten in K mit $\operatorname{grad}(f) < q$. Zeige: die Auswertungsabbildung

$$\epsilon : \mathcal{P} \longrightarrow \operatorname{Abb}(K, K) \quad \text{mit} \quad \epsilon(f)(a) = f(a) \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{P},\ a \in K$$

ist bijektiv.

6. Man bestimme alle irreduziblen Polynome vom Grad 5 über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.