LA-Klausur 10. Oktober 2013

1) Die beiden Punkte des $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten $(3, 4, 7)$ und $(8, 3, 1)$ liegen auf einer der Kugel um den 0-Punkt mit dem Radius $\sqrt{74}$. Wie groß ist der Abstand dieser Punkte auf dieser Kugel?

2) Es sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, so dass $a_{ij} = 0$ für $i + j \neq n + 1$, d.h. nur auf der Nebendiagonale stehen von Null verschiedene Elemente. Es sei $a_{ij} > 0$ für $i + j = n + 1$.

Man beweise, dass die Matrix A diagonalisierbar ist.

3) Man betrachte den Endomorphimus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$, dessen Matrix in der Standardbasis wie folgt aussieht:

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & 8 & -5 \\ -1 & 10 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte dieses Endomorphismus und die Dimension der Haupträume.

4) Man betrachte das folgende lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$:

$$7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 0$$
$$11x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 0$$

Die Menge L aller Lösungen $\underline{x}$ dieser Gleichungen ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^6$.

Man berechne eine Basis des Vektorraums L.

5) Man finde eine Jordanbasis für die folgende nilpotente Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

6) Wir bezeichnen mit e_1, e_2, e_3 die Standardvektoren von $\mathbb{R}^3$. Es gibt genau eine symmetrische Bilinearform

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

so dass

$$B(e_i, e_j) = i \cdot j - i - j.$$

Man finde die Sylvestersche Normalform von B.

7) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten K-Vektorraums V, der den Rang 1 hat (d.h. $\dim f(V) = 1$).

Man beweise, dass

$$\det(\mathrm{id}_V + f) = 1 + \operatorname{Spur} f.$$