Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir betrachten die Menge $M = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und definieren darauf die Relation

$$(a, a') \sim (b, b') :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \colon (\lambda \cdot a = b \text{ und } \lambda \cdot a' = b').$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Was passiert, wenn wir auch $\lambda = 0$ erlauben?

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Wir definieren auf $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ eine Äquivalenzrelation durch

$$A \sim B :\Leftrightarrow 3 \mid \#A - \#B$$

(i) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

(ii) Genauso können wir mit derselber Vorschrift eine Äquivalenzrelation $\hat{\sim}$ auf der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$ definieren. Existiert eine Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})/\sim$ und $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})/\hat{\sim}$?

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung und seien $A, B \subset X$ und $M, N \subset Y$ Teilmengen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(iii) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

(iv) $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Für zwei reelle Zahlen a und b definieren wir die Abbildung

$$f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Verkettung von Abbildungen eine assoziative Verknüpfung auf der Menge $\mathrm{Agg}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ definiert.

bitte wenden/scrollen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 5

(ii) Finden Sie ein neutrales Element $e \in \mathrm{Agg}(\mathbb{R})$ bezüglich der Verkettung von Abbildungen.

(iii) Auch auf der Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0\}$ definiert die Verkettung von Abbildungen eine assoziative Verknüpfung mit neutralem Element e (aus dem vorherigen Aufgabenteil). Das dürfen Sie ab jetzt verwenden ohne es selbst zu begründen. Zeigen Sie, dass genau eines der beiden Tripel $(\mathrm{Agg}(\mathbb{R}), \circ, e)$ und $(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \circ, e)$ eine Gruppe ist.

(iv) Ist das Tripel aus dem dritten Aufgabenteil, welches eine Gruppe ist, sogar eine abelsche Gruppe?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Lineare Algebra I, SoSe23
Blatt 5

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären