Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 1

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 30.4.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Führen Sie die reelle Hauptachsentransformation durch an der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & \sqrt{2} \\ -5 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix},$$

d. h. finden Sie eine orthogonale Matrix X und eine Diagonalmatrix D mit $A = X^T D X$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(i) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix, so ist durch $\langle x, y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$ eine hermitesche Form definiert.

(ii) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, für die $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ kein Skalarprodukt ist. (Führen Sie einen direkten Nachweis, ohne das Hurwitz-Kriterium zu verwenden.)

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie folgendes Kriterium für positiv semi-definite Matrizen.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann sind äquivalent:

(i) A ist positiv semi-definit.

(ii) Es gibt eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = W^T W$.

Hinweis zu (i) $\Rightarrow$ (2): Nach dem Satz über die reelle Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen gibt es eine Matrix X mit $A = X^T \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot X$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen positiv definit sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie auch die Signatur der Matrix C.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l2: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Warum hat ein selbstadjungierter Endomorphismus nur reelle Eigenwerte?

2.) Wie ist die Signatur einer selbstadjungierten Matrix definiert?

3.) Wann heißt eine selbstadjungierte Matrix positiv definit? Warum muss die Matrix dafür selbstadjungiert sein?

4.) Was besagt der Trägheitssatz zur Sylvester, was ist da „träge“?

5.) Bringt man eine selbstadjungierte Matrix mit der Hauptachsentransformation auf Diagonalform, was gilt dann für die Signatur dieser Diagonalmatrix?

6.) Was sind die Hauptunterdeterminanten einer Matrix?

7.) Wie lautet das Hurwitz-Kriterium für die positive Definitheit einer selbstadjungierten Matrix?

8.) Wie wird der Trägheitssatz von Sylvester im Beweis des Hurwitz-Kriteriums angewendet?

9.) Wie kann man die positive/negative (semi-)Definitheit an den Vorzeichen der Eigenwerte einer selbstadjungierten Matrix ablesen?

10.) Was ist eine indefinite selbstadjungierte Matrix?