Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 2

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 28. Oktober 2010, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 5 *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y} = y$ mit $y(0) = 1$ iterativ mit Hilfe des beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf verwendeten Fixpunktverfahrens.

Hinweis: Starten Sie mit der Nullfunktion.

Aufgabe 6 *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie jeweils diejenigen (ggf. unbeschränkten) Quader im $\mathbb{R}^2$, auf denen

$$f(x,y) = \sin\bigl(|x| + y^2\bigr) \quad \text{bzw.} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- stetig;
- lipschitzstetig;
- differenzierbar

ist. Geben Sie in den Fällen der Lipschitzstetigkeit eine Lipschitzkonstante an.

Aufgabe 7 *(9 Punkte)*

Berechnen Sie für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Exponentialreihe der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

- (Wann) Kommutieren A und B bzw. e^A und e^B?
- (Wann) Gilt $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$?
- Was ändert sich an Ihren Antworten, wenn auf der oberen Nebendiagonalen von B die 0 durch eine 1 ersetzt wird?

Aufgabe 8 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie für beliebige $n \times n$-Matrizen A

$$\|\mathrm{e}^A\| \leq \mathrm{e}^{\|A\|} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA}.$$

Hierbei bezeichne $\|\cdot\|$ die übliche Operatornorm.