Dynamisches Verhalten in Neuronalen Netzen

Sebastian Copony

30.08.2007

Motivation

- Computer sind dem Gehirn bei Problemen, welche durch Algorithmen zu lösen sind, überlegen
- Aber deutlich schlechter in z.B. der Bilderkennung

Motivation

- Computer sind dem Gehirn bei Problemen, welche durch Algorithmen zu lösen sind, überlegen
- Aber deutlich schlechter in z.B. der Bilderkennung
- Idee: Arbeitsweise des Gehirns auf Maschinen übertragen → Künstliche Neuronale Netze

Motivation

- Computer sind dem Gehirn bei Problemen, welche durch Algorithmen zu lösen sind, überlegen
- Aber deutlich schlechter in z.B. der Bilderkennung
- Idee: Arbeitsweise des Gehirns auf Maschinen übertragen → Künstliche Neuronale Netze
- Eigenschaften: lernfähig, robust, fehlertolerant, hochparallele Informationsverarbeitung

Motivation

- Computer sind dem Gehirn bei Problemen, welche durch Algorithmen zu lösen sind, überlegen
- Aber deutlich schlechter in z.B. der Bilderkennung
- Idee: Arbeitsweise des Gehirns auf Maschinen übertragen $\longrightarrow$ Künstliche Neuronale Netze
- Eigenschaften: lernfähig, robust, fehlertolerant, hochparallele Informationsverarbeitung
- Die meisten Modelle beziehen keine chaotische Dynamik ein, was biologischem Vorbild widerspricht

Motivation

- Computer sind dem Gehirn bei Problemen, welche durch Algorithmen zu lösen sind, überlegen
- Aber deutlich schlechter in z.B. der Bilderkennung
- Idee: Arbeitsweise des Gehirns auf Maschinen übertragen → Künstliche Neuronale Netze
- Eigenschaften: lernfähig, robust, fehlertolerant, hochparallele Informationsverarbeitung
- Die meisten Modelle beziehen keine chaotische Dynamik ein, was biologischem Vorbild widerspricht

Künstliches Neuron

Definition

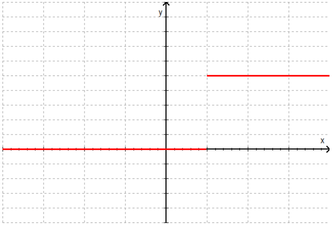
Ein *(künstliches) Neuron* ist ein Tupel (x, w, f_a, f_o, o) bestehend aus einem Eingabevektor $x = (x_1, ..., x_n)$, einem Gewichtevektor $w = (w_1, ..., w_n)$, einer Aktivierungsfunktion $f_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}$ und einer Ausgabefunktion $f_o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f_o(f_a) = o$ der Ausgabewert ist, welcher an die nachfolgenden Neuronen weitergeleitet wird.

- Aktivierungszustand $a = f_a(net, \Theta)$
  - Netzeingabe $net = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$
  - Schwellenwert Θ
- meistens $f_o = id$, also $o = a$

Aktivierungsfunktionen

binäre Schwellenwertfunktion

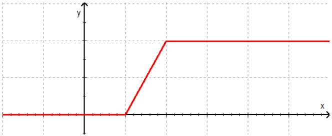
$$f_a = \begin{cases} 1 & \text{, für } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \Theta, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$



Aktivierungsfunktionen

stückweise lineare Funktionen

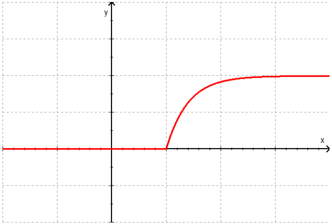
$$f_{a,\mu}(z) = \begin{cases} 0 & \text{, für } z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i < \Theta, \\ \mu(z - \Theta) & \text{, für } \Theta \leq z \leq \Theta + \frac{1}{\mu}, \\ 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$



Aktivierungsfunktionen

sigmoide Funktionen

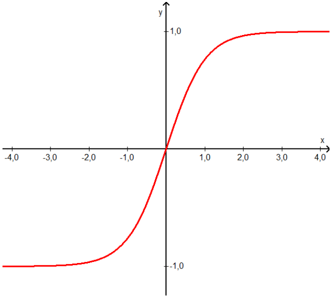
$$f_{a,\mu}(z) = \begin{cases} 1 - \exp(-\mu(z - \Theta)) & \text{, für } z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \Theta, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$



Aktivierungsfunktionen

Tangens hyperbolicus

$$f_a(z) = 1 - \frac{2}{e^{2z} + 1} \text{ mit } z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$



Künstliches Neuronales Netz

Definition

Ein *(künstliches) Neuronales Netz* ist ein Paar (N, V), wobei N eine Menge von n Neuronen und V eine Menge gewichteter gerichteter Verbindungen ist. Eine gewichtete gerichtete Verbindung ist ein Tupel (k_i, k_j, w_{ij}), wobei $k_i, k_j \in N$ und das Gewicht $w_{ij} \in \mathbb{R}$ sind. Dabei ist k_i das sendende und k_j das empfangende Element.

Neuronale Netze bestehen aus

- Eingabeschicht
- verborgene Schicht
- Ausgabeschicht

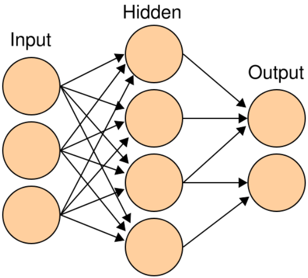


Abbildung: Ein einfaches mehrschichtiges Netz.

Mc-Culloch-Pitts-Zelle

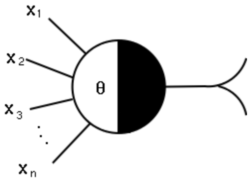
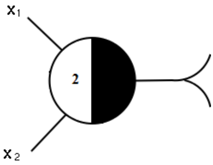


Abbildung: McCulloch–Pitts–Zelle.

- Zustände *true* $= 1$ und *false* $= 0$
- beliebig viele binäre Eingabeleitungen
- feuert sobald (ungewichtete) Summe der Eingabewerte Schwellenwert überschreitet
- eine aktive hemmende Eingabe reicht um Inaktivität zu verursachen

Mc-Culloch-Pitts-Zelle



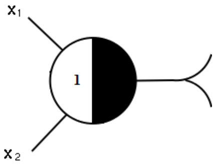


Abbildung: McCulloch–Pitts–Zellen zur Berechnung der AND und OR Funktion.

- Einzelne Zellen können schon einige logische Funktionen berechnen
- Zweischichtige Mc-Culloch-Pitts-Netze können beliebige logische Funktionen berechnen

Perzeptron

Erweiterung des Mc-Culloch-Pitts-Modells

- gewichtete Verbindungen
  - erregend, falls das Verbindungsgewicht größer Null
  - hemmend, falls das Verbindungsgewicht kleiner Null
- lernt durch Veränderung der Gewichte

Perzeptron

Erweiterung des Mc-Culloch-Pitts-Modells

- gewichtete Verbindungen
  - erregend, falls das Verbindungsgewicht größer Null
  - hemmend, falls das Verbindungsgewicht kleiner Null
- lernt durch Veränderung der Gewichte
- Netze können BIAS-Neuron enthalten, welches immer feuert und zu jedem Neuron dessen negativen Schwellenwert als Verbindungsgewicht hat (Schwellenwert kann durch Lernalgorithmus verändert werden)

Perzeptron

Erweiterung des Mc-Culloch-Pitts-Modells

- gewichtete Verbindungen
  - erregend, falls das Verbindungsgewicht größer Null
  - hemmend, falls das Verbindungsgewicht kleiner Null
- lernt durch Veränderung der Gewichte
- Netze können BIAS-Neuron enthalten, welches immer feuert und zu jedem Neuron dessen negativen Schwellenwert als Verbindungsgewicht hat (Schwellenwert kann durch Lernalgorithmus verändert werden)

Ein Perzeptron-Lernalgorithmus

- P die Menge, für die das Perzeptron eine 1 ausgeben soll
- N die Menge, für die das Perzeptron eine 0 ausgeben soll
- α heißt die Lernrate des Algorithmus

Start:	Der Gewichtevektor w_0 wird zufällig generiert Setze $t := 0$.
Testen:	Ein Punkt $x \in P \cup N$ wird zufällig gewählt. Falls $x \in P$ und $w_t x > 0$ gehe zu *Testen* Falls $x \in P$ und $w_t x \leq 0$ gehe zu *Addieren* Falls $x \in N$ und $w_t x < 0$ gehe zu *Testen* Falls $x \in P$ und $w_t x \geq 0$ gehe zu *Subtrahieren*
Addieren:	Setze $w_{t+1} = w_t + \alpha x$. Setze $t := t + 1$. Gehe zu *Testen*.
Subtrahieren:	Setze $w_{t+1} = w_t - \alpha x$. Setze $t := t + 1$. Gehe zu *Testen*.

Perzeptron-Lernen

Konvergenzsatz von Rosenblatt

Ein Perzeptron kann jede Funktion, die es repräsentieren kann, in endlicher Zeit lernen.

- Mc-Culloch-Pitts-Zelle / Einfaches Perzeptron können XOR-Funktion nicht darstellen
- Voraussetzung: Lineare Trennbarkeit des Eingaberaums

Lineare Trennbarkeit

Eine Funktion heißt *linear trennbar*, wenn ihr n-dimensionaler Eingaberaum sich durch eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene in die Bereiche mit Funktionswert 0 bzw. 1 trennen lässt.

- Mehrschichtige Perzeptronen können den Eingaberaum in beliebige Polygone teilen.

XOR-Perzeptron

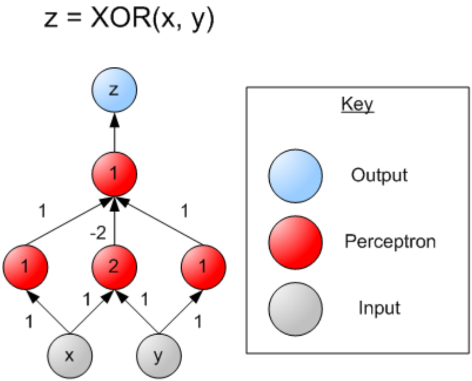


Abbildung: Ein dreischichtiges Perzeptron, welches die XOR-Funktion darstellt.

Aktivierungsfunktion

Wir verwenden die stückweise lineare Aktivierungsfunktion

$$F_a(z) = \begin{cases} 0 & \text{, für } z < t, \\ a(z-t) & \text{, für } t \leq z \leq t + \frac{1}{a}, \\ 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

mit

- Steigungsparameter a
- Schwellenwert t

Gekoppelte Differentialgleichungen

- x Aktivierungszustand des erregenden Neurons
- y Aktivierungszustand des hemmenden Neurons

$$x_{n+1} = F_a(w_{xx}x_n - w_{yx}y_n)$$
$$y_{n+1} = F_b(w_{xy}x_n - w_{yy}y_n)$$

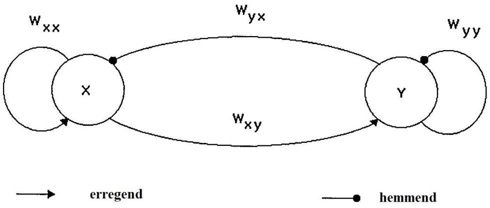


Abbildung: Das Paar erregendes (x) und hemmendes (y) Neuron.

Vereinfachungen

- w_{xx} und w_{xy} werden in a bzw. b eingerechnet
- w_{yx} und w_{yy} werden entsprechend neu berechnet und mit k bzw. k' bezeichnet
- neue Variablen $z_n = x_n - ky_n$ und $z'_n = x_n - k'y_n$

$$z_{n+1} = F_a(z_n) - kF_b(z'_n)$$

$$z'_{n+1} = F_a(z_n) - k'F_b(z'_n)$$

Im Folgenden betrachten wir die Fälle $(t = 0)$

1. $k = k' = 1$

Vereinfachungen

- w_{xx} und w_{xy} werden in a bzw. b eingerechnet
- w_{yx} und w_{yy} werden entsprechend neu berechnet und mit k bzw. k' bezeichnet
- neue Variablen $z_n = x_n - ky_n$ und $z'_n = x_n - k'y_n$

$$z_{n+1} = F_a(z_n) - kF_b(z'_n)$$

$$z'_{n+1} = F_a(z_n) - k'F_b(z'_n)$$

Im Folgenden betrachten wir die Fälle $(t = 0)$

1. $k = k' = 1$
2. $k = k' \neq 1$

Vereinfachungen

- w_{xx} und w_{xy} werden in a bzw. b eingerechnet
- w_{yx} und w_{yy} werden entsprechend neu berechnet und mit k bzw. k' bezeichnet
- neue Variablen $z_n = x_n - ky_n$ und $z'_n = x_n - k'y_n$

$$z_{n+1} = F_a(z_n) - kF_b(z'_n)$$

$$z'_{n+1} = F_a(z_n) - k'F_b(z'_n)$$

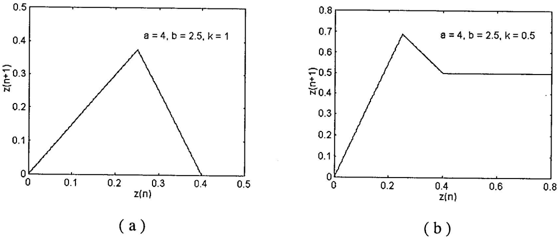
Im Folgenden betrachten wir die Fälle $(t = 0)$

1. $k = k' = 1$
2. $k = k' \neq 1$

Dynamik für $k = k' = 1$

- $w_{yx} = w_{xx}$
- $w_{xy} = w_{yy}$
- $a > b$

$$z_n + 1 = F(z_n) = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$



Fixpunkte

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
   - existiert für alle Parameterwerte
   - stabil für $a - b < 1$
2. $z_2^* = \frac{1}{1+b}$
   - existiert für $a - b > 1$
   - stabil für $b < 1$

Fixpunkte

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
   - existiert für alle Parameterwerte
   - stabil für $a - b < 1$
2. $z_2^* = \frac{1}{1+b}$
   - existiert für $a - b > 1$
   - stabil für $b < 1$

Sonst chaotisches Verhalten bis der maximale Output $1 - \frac{b}{a}$ in den Bereich $Z > \frac{1}{b}$ iteriert.

Fixpunkte

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
    - existiert für alle Parameterwerte
    - stabil für $a - b < 1$
2. $z_2^* = \frac{1}{1+b}$
    - existiert für $a - b > 1$
    - stabil für $b < 1$

Sonst chaotisches Verhalten bis der maximale Output $1 - \frac{b}{a}$ in den Bereich $Z > \frac{1}{b}$ iteriert.

Lyapunov-Exponent

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Der Lyapunov-Exponent ($\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(z_n)|$) kann unter 2 Bedingungen analytisch berechnet werden

1. $\frac{b}{a} = 0{,}5$
   - $|f'(z_n)| = a - b = \frac{a}{2} = b$

Lyapunov-Exponent

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Der Lyapunov-Exponent ($\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(z_n)|$) kann unter 2 Bedingungen analytisch berechnet werden

1. $\frac{b}{a} = 0{,}5$
   - $|f'(z_n)| = a - b = \frac{a}{2} = b$
   - $\lambda = \ln b$ für $0 < a < 4$

Lyapunov-Exponent

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Der Lyapunov-Exponent ($\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(z_n)|$) kann unter 2 Bedingungen analytisch berechnet werden

1. $\frac{b}{a} = 0{,}5$
   - $|f'(z_n)| = a - b = \frac{a}{2} = b$
   - $\lambda = \ln b$ für $0 < a < 4$
2. $F(\frac{1}{a}) = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{b}$.

Lyapunov-Exponent

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Der Lyapunov-Exponent ($\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(z_n)|$) kann unter 2 Bedingungen analytisch berechnet werden

1. $\frac{b}{a} = 0{,}5$
   - $|f'(z_n)| = a - b = \frac{a}{2} = b$
   - $\lambda = \ln b$ für $0 < a < 4$
2. $F(\frac{1}{a}) = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{b}$.
   - $\lambda = -\frac{b}{a} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right)$

Lyapunov-Exponent

$$z_n + 1 = \begin{cases} (a-b)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - bz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Der Lyapunov-Exponent ($\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(z_n)|$) kann unter 2 Bedingungen analytisch berechnet werden

1. $\frac{b}{a} = 0{,}5$
   - $|f'(z_n)| = a - b = \frac{a}{2} = b$
   - $\lambda = \ln b$ für $0 < a < 4$
2. $F(\frac{1}{a}) = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{b}$.
   - $\lambda = -\frac{b}{a} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{b}{a}\right)$

Numerisch berechneter Lyapunov-Exponent

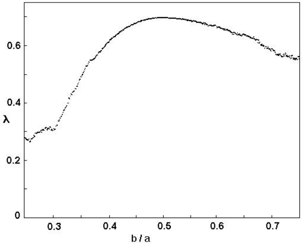


Abbildung: Lyapunov–Exponent für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. scharfe Trennung zwischen Fixpunktverhalten und Chaos bei $\frac{b}{a} = 0{,}25$ und $0{,}75$
2. bei $\frac{b}{a} = 0{,}5$ wird $[0; \frac{1}{b}]$ vom chaotischen Orbit gleichmäßig besucht$(F(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b})$

Numerisch berechneter Lyapunov-Exponent

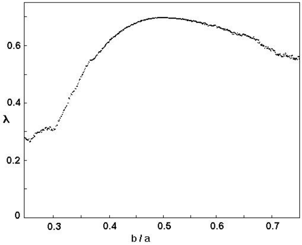


Abbildung: Lyapunov–Exponent für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. scharfe Trennung zwischen Fixpunktverhalten und Chaos bei $\frac{b}{a} = 0{,}25$ und $0{,}75$
2. bei $\frac{b}{a} = 0{,}5$ wird $[0; \frac{1}{b}]$ vom chaotischen Orbit gleichmäßig besucht$(F(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b})$

Koexistenz von Chaos und Fixpunkt

Wenn $F(\frac{1}{a}) > \frac{1}{b}$ gilt, dann wird das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ geteilt in

1. Cantor-Menge mit chaotischem Verhalten
2. „Fluchtmenge", die auf $z_1^* = 0$ abbildet

- $z_n \in [\frac{1}{b(a-b)}; \frac{b-1}{b^2}] \Rightarrow z_{n+2} = 0$

Koexistenz von Chaos und Fixpunkt

Wenn $F(\frac{1}{a}) > \frac{1}{b}$ gilt, dann wird das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ geteilt in

1. Cantor-Menge mit chaotischem Verhalten
2. „Fluchtmenge", die auf $z_1^* = 0$ abbildet

- $z_n \in [\frac{1}{b(a-b)}; \frac{b-1}{b^2}] \Rightarrow z_{n+2} = 0$
- $z_n \in (0; \frac{1}{b(a-b)}) \cup (\frac{b-1}{b^2}; \frac{1}{b}) \Rightarrow z_{n+2} \neq 0$

Koexistenz von Chaos und Fixpunkt

Wenn $F(\frac{1}{a}) > \frac{1}{b}$ gilt, dann wird das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ geteilt in

1. Cantor-Menge mit chaotischem Verhalten
2. „Fluchtmenge", die auf $z_1^* = 0$ abbildet

- $z_n \in [\frac{1}{b(a-b)}; \frac{b-1}{b^2}] \Rightarrow z_{n+2} = 0$
- $z_n \in (0; \frac{1}{b(a-b)}) \cup (\frac{b-1}{b^2}; \frac{1}{b}) \Rightarrow z_{n+2} \neq 0$
- Nach m Iterationen: 2^m Fragmente der invarianten chaotischen Teilmenge mit $\frac{m!}{r!(m-r)!}$ $(r = 0, 1, ..., m)$ Intervallen der Länge $(a-b)^r(1-b)^{r-m}$

Koexistenz von Chaos und Fixpunkt

Wenn $F(\frac{1}{a}) > \frac{1}{b}$ gilt, dann wird das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ geteilt in

1. Cantor-Menge mit chaotischem Verhalten
2. „Fluchtmenge“, die auf $z_1^* = 0$ abbildet

- $z_n \in [\frac{1}{b(a-b)}; \frac{b-1}{b^2}] \Rightarrow z_{n+2} = 0$
- $z_n \in (0; \frac{1}{b(a-b)}) \cup (\frac{b-1}{b^2}; \frac{1}{b}) \Rightarrow z_{n+2} \neq 0$
- Nach m Iterationen: 2^m Fragmente der invarianten chaotischen Teilmenge mit $\frac{m!}{r!(m-r)!}$ $(r = 0, 1, ..., m)$ Intervallen der Länge $(a-b)^r(1-b)^{r-m}$
- Für $\frac{b}{a} = 0{,}5$ haben alle Intervalle die gleiche Länge

Koexistenz von Chaos und Fixpunkt

Wenn $F(\frac{1}{a}) > \frac{1}{b}$ gilt, dann wird das Intervall $[0; \frac{1}{b}]$ geteilt in

1. Cantor-Menge mit chaotischem Verhalten
2. „Fluchtmenge", die auf $z_1^* = 0$ abbildet

- $z_n \in [\frac{1}{b(a-b)}; \frac{b-1}{b^2}] \Rightarrow z_{n+2} = 0$
- $z_n \in (0; \frac{1}{b(a-b)}) \cup (\frac{b-1}{b^2}; \frac{1}{b}) \Rightarrow z_{n+2} \neq 0$
- Nach m Iterationen: 2^m Fragmente der invarianten chaotischen Teilmenge mit $\frac{m!}{r!(m-r)!}$ $(r = 0, 1, ..., m)$ Intervallen der Länge $(a-b)^r(1-b)^{r-m}$
- Für $\frac{b}{a} = 0{,}5$ haben alle Intervalle die gleiche Länge

Parameterraum

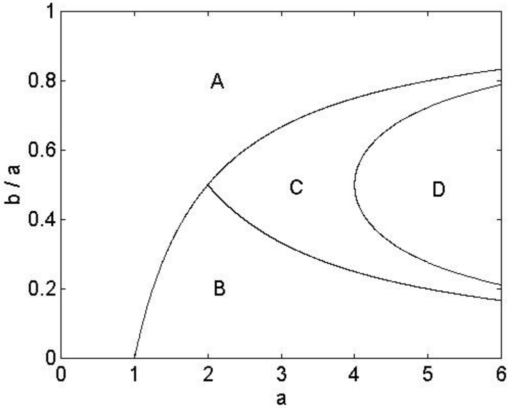


Abbildung: Der Parameterraum a gegen $\frac{b}{a}$ für $k = k' = 1$. Bereich A: $z_1^* = 0$ stabil, B: $z_2^* = \frac{1}{1+b}$ stabil, C: Chaos, D: z_1^* stabil zusammen mit invarianter chaotischer Nullmenge.

Verzweigungsdiagramm

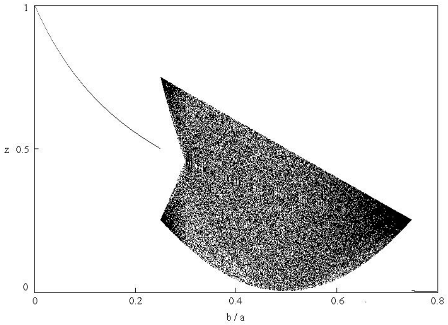


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. $\frac{b}{a} < 0{,}25$ $(b < 1)$: z_2^* stabil
2. $\frac{b}{a} = 0{,}25$: z_2^* wird instabil und 2 Bänder mit chaotischem Verhalten treten auf

Verzweigungsdiagramm

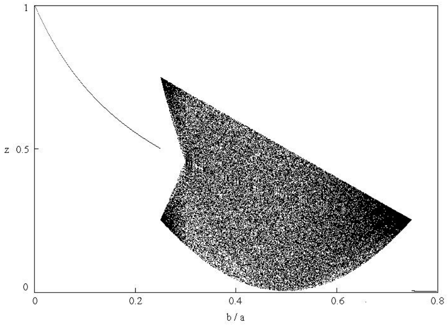


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. $\frac{b}{a} < 0{,}25$ $(b < 1)$: z_2^* stabil
2. $\frac{b}{a} = 0{,}25$: z_2^* wird instabil und 2 Bänder mit chaotischem Verhalten treten auf
3. $\frac{b}{a} \approx 0{,}2985$: Chaotische Bänder treffen instabilen z_2^* und verschmelzen zu einem chaotischen Band

Verzweigungsdiagramm

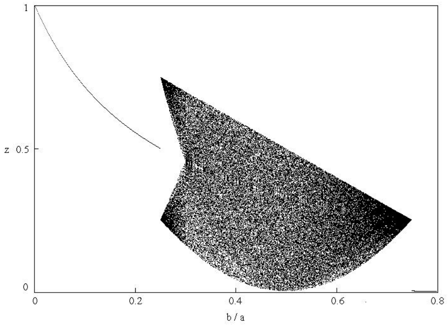


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. $\frac{b}{a} < 0{,}25$ $(b < 1)$: z_2^* stabil
2. $\frac{b}{a} = 0{,}25$: z_2^* wird instabil und 2 Bänder mit chaotischem Verhalten treten auf
3. $\frac{b}{a} \approx 0{,}2985$: Chaotische Bänder treffen instabilen z_2^* und verschmelzen zu einem chaotischen Band
4. $\frac{b}{a} = 0{,}5$: Chaotischer Orbit besucht gleichmäßig $[0; \frac{1}{b}]$

Verzweigungsdiagramm

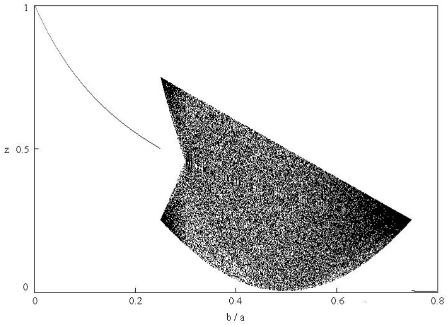


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. $\frac{b}{a} < 0{,}25$ $(b < 1)$: z_2^* stabil
2. $\frac{b}{a} = 0{,}25$: z_2^* wird instabil und 2 Bänder mit chaotischem Verhalten treten auf
3. $\frac{b}{a} \approx 0{,}2985$: Chaotische Bänder treffen instabilen z_2^* und verschmelzen zu einem chaotischen Band
4. $\frac{b}{a} = 0{,}5$: Chaotischer Orbit besucht gleichmäßig $[0; \frac{1}{b}]$
5. $\frac{b}{a} = 0{,}75$: Chaotisches Band trifft instabilen z_2^* und wird zerstört, $z_1^* = 0$ wird stabil $(a - b \leq 1)$

Verzweigungsdiagramm

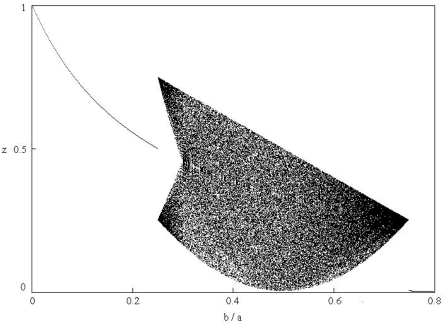


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für $k = k' = 1$ und $a = 4$.

1. $\frac{b}{a} < 0{,}25$ $(b < 1)$: z_2^* stabil
2. $\frac{b}{a} = 0{,}25$: z_2^* wird instabil und 2 Bänder mit chaotischem Verhalten treten auf
3. $\frac{b}{a} \approx 0{,}2985$: Chaotische Bänder treffen instabilen z_2^* und verschmelzen zu einem chaotischen Band
4. $\frac{b}{a} = 0{,}5$: Chaotischer Orbit besucht gleichmäßig $[0; \frac{1}{b}]$
5. $\frac{b}{a} = 0{,}75$: Chaotisches Band trifft instabilen z_2^* und wird zerstört, $z_1^* = 0$ wird stabil $(a - b \leq 1)$

Dynamik für $k = k' \neq 1$

- $\frac{w_{yx}}{w_{xx}} = \frac{w_{yy}}{w_{xy}} = k$
- $a > b$

$$z_{n+1} = F(z_n) = \begin{cases} (a - kb)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - kbz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 1 - k & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Der Hauptunterschied zum vorherigen Fall ist die Existenz von superstabilen Orbits der Periode $m \geq 2$, bedingt durch ein Gebiet der Steigung Null ($z > \frac{1}{b}$), welches einen Output ungleich Null produziert.

Fixpunkte

$$z_{n+1} = \begin{cases} (a - kb)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1 - kbz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 1 - k & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
   - existiert für alle Parameterwerte
   - stabil für $a - kb < 1$
2. $$z_2^* = \begin{cases} 1 - k & \text{, für } 0 < k < 1 - \frac{1}{b}, \\ \frac{1}{1+kb} & \text{, für } 1 - \frac{1}{b} < k < \frac{a-1}{b}. \end{cases}$$
   - $z_2^* = 1 - k$ ist, falls er existiert, superstabil

Fixpunkte

$$z_{n+1} = \begin{cases} (a-kb)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1-kbz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 1-k & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
   - existiert für alle Parameterwerte
   - stabil für $a - kb < 1$
2. $$z_2^* = \begin{cases} 1-k & \text{, für } 0 < k < 1-\frac{1}{b}, \\ \frac{1}{1+kb} & \text{, für } 1-\frac{1}{b} < k < \frac{a-1}{b}. \end{cases}$$
   - $z_2^* = 1-k$ ist, falls er existiert, superstabil
   - $z_2^* = \frac{1}{1+kb}$ stabil, falls $bk < 1$

Fixpunkte

$$z_{n+1} = \begin{cases} (a-kb)z_n & \text{, für } 0 \le z_n \le \frac{1}{a}, \\ 1 - kbz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \le \frac{1}{b}, \\ 1-k & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
   - existiert für alle Parameterwerte
   - stabil für $a - kb < 1$
2. $$z_2^* = \begin{cases} 1-k & \text{, für } 0 < k < 1 - \frac{1}{b}, \\ \frac{1}{1+kb} & \text{, für } 1 - \frac{1}{b} < k < \frac{a-1}{b}. \end{cases}$$
   - $z_2^* = 1 - k$ ist, falls er existiert, superstabil
   - $z_2^* = \frac{1}{1+kb}$ stabil, falls $bk < 1$

Falls kein Fixpunkt stabil ist und kein $F(z) > \frac{1}{b}$ existiert, dann zeigt das System chaotisches Verhalten.

Fixpunkte

$$z_{n+1} = \begin{cases} (a-kb)z_n & \text{, für } 0 \leq z_n \leq \frac{1}{a}, \\ 1-kbz_n & \text{, für } \frac{1}{a} < z_n \leq \frac{1}{b}, \\ 1-k & \text{, sonst.} \end{cases}$$

1. $z_1^* = 0$
   - existiert für alle Parameterwerte
   - stabil für $a - kb < 1$
2. $$z_2^* = \begin{cases} 1-k & \text{, für } 0 < k < 1-\frac{1}{b}, \\ \frac{1}{1+kb} & \text{, für } 1-\frac{1}{b} < k < \frac{a-1}{b}. \end{cases}$$
   - $z_2^* = 1-k$ ist, falls er existiert, superstabil
   - $z_2^* = \frac{1}{1+kb}$ stabil, falls $bk < 1$

Falls kein Fixpunkt stabil ist und kein $F(z) > \frac{1}{b}$ existiert, dann zeigt das System chaotisches Verhalten.

Parameterraum

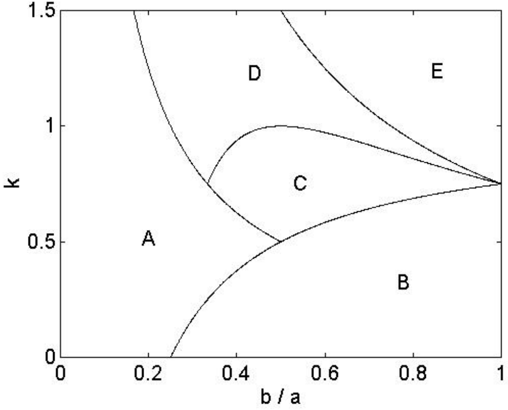


Abbildung: Der Parameterraum $\frac{b}{a}$ gegen k für $a = 4$. Bereich A: $z_2^* = \frac{1}{1+kb}$ stabil, B: $z_2^* = 1 - k$ stabil, C: superstabile periodische Orbits, D: Chaos, E: $z_1^* = 0$ stabil.

Verzweigungsdiagramm

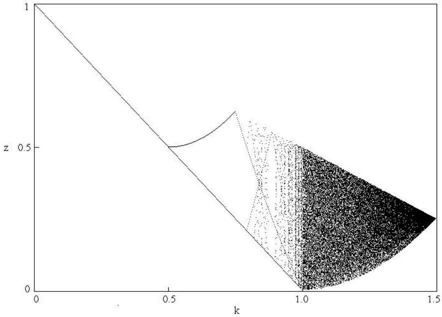


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für den Parameter $k = k' \neq 1$ bei $a = 4$ und $b = 2$.

1. $0 \leq k < 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ $(0 < k < \frac{1}{b})$ stabil
2. $k = 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ wird instabil und superstabiler 2–periodischer Orbit entsteht

Verzweigungsdiagramm

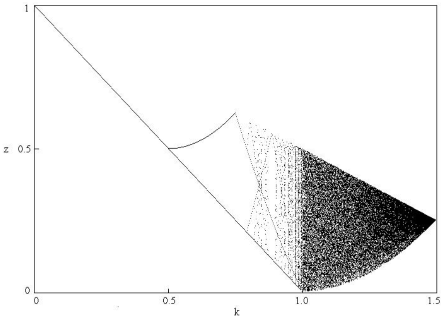


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für den Parameter $k = k' \neq 1$ bei $a = 4$ und $b = 2$.

1. $0 \leq k < 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ $(0 < k < \frac{1}{b})$ stabil
2. $k = 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ wird instabil und superstabiler 2–periodischer Orbit entsteht
3. mit wachsendem k entstehen periodische Orbits aller Längen kompliziertem Muster folgend

Verzweigungsdiagramm

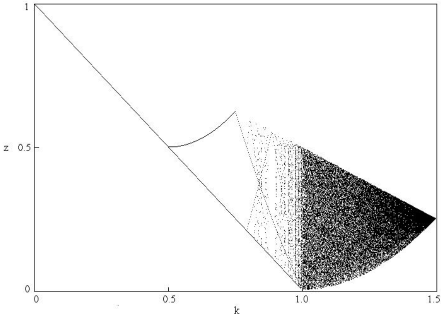


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für den Parameter $k = k' \neq 1$ bei $a = 4$ und $b = 2$.

1. $0 \leq k < 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ $(0 < k < \frac{1}{b})$ stabil
2. $k = 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ wird instabil und superstabiler 2–periodischer Orbit entsteht
3. mit wachsendem k entstehen periodische Orbits aller Längen kompliziertem Muster folgend
4. bis bei $k = 1$ alle periodischen Orbits instabil werden und das System chaotisch wird

Verzweigungsdiagramm

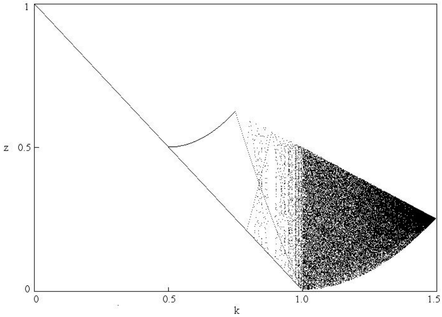


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für den Parameter $k = k' \neq 1$ bei $a = 4$ und $b = 2$.

1. $0 \leq k < 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ $(0 < k < \frac{1}{b})$ stabil
2. $k = 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ wird instabil und superstabiler 2–periodischer Orbit entsteht
3. mit wachsendem k entstehen periodische Orbits aller Längen kompliziertem Muster folgend
4. bis bei $k = 1$ alle periodischen Orbits instabil werden und das System chaotisch wird
5. $k = 1{,}5$: Chaotisches Verhalten endet und $z_1^* = 0$ wird stabil $(a - kb < 1)$

Verzweigungsdiagramm

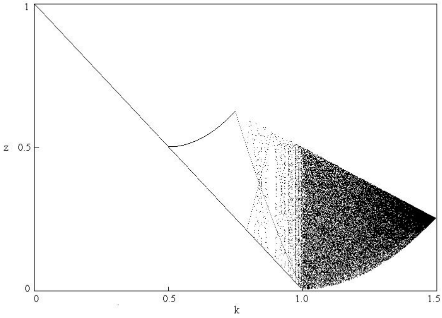


Abbildung: Verzweigungsdiagramm für den Parameter $k = k' \neq 1$ bei $a = 4$ und $b = 2$.

1. $0 \leq k < 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ $(0 < k < \frac{1}{b})$ stabil
2. $k = 0{,}5$: $z_2^* = 1 - k$ wird instabil und superstabiler 2–periodischer Orbit entsteht
3. mit wachsendem k entstehen periodische Orbits aller Längen kompliziertem Muster folgend
4. bis bei $k = 1$ alle periodischen Orbits instabil werden und das System chaotisch wird
5. $k = 1{,}5$: Chaotisches Verhalten endet und $z_1^* = 0$ wird stabil $(a - kb < 1)$

Dynamisches System

In diesem Abschnitt verwenden wir die sigmoide Aktivierungsfunktion

$$F_\mu(z) = \begin{cases} 1 - \exp(-\mu z) & \text{, für } z \geq 0, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt erhalten wir die gekoppelten Differentialgleichungen

$$x_{n+1} = F_a(w_{xx} x_n - w_{yx} y_n + I_n)$$

$$y_{n+1} = F_b(w_{xy} x_n - w_{yy} y_n + I'_n)$$

wobei $F_{a,b}$ sigmoide Aktivierungsfunktionen und I, I' externe Reize sind.

Dynamisches System

In diesem Abschnitt verwenden wir die sigmoide Aktivierungsfunktion

$$F_\mu(z) = \begin{cases} 1 - \exp(-\mu z) & \text{, für } z \geq 0, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt erhalten wir die gekoppelten Differentialgleichungen

$$x_{n+1} = F_a(w_{xx}x_n - w_{yx}y_n + I_n)$$

$$y_{n+1} = F_b(w_{xy}x_n - w_{yy}y_n + I'_n)$$

wobei $F_{a,b}$ sigmoide Aktivierungsfunktionen und I, I' externe Reize sind.

Vereinfachungen

- w_{xx} und w_{xy} werden wieder in a bzw. b eingerechnet
- w_{yx} und w_{yy} werden entsprechend neu berechnet und mit k bzw. k' bezeichnet
- neue Variablen $z_n = x_n - ky_n$ und $z'_n = x_n - k'y_n$
- $I_n = I'_n = I$ konstanter externer Reiz
- $k = k' = 1$

$$z_{n+1} = F_a(z_n + I) - F_b(z_n + I)$$

Trotz Einfachheit des Models, zeigt es breites Spektrum an dynamischem Verhalten (Fixpunkte, periodische Orbits, Chaos).

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

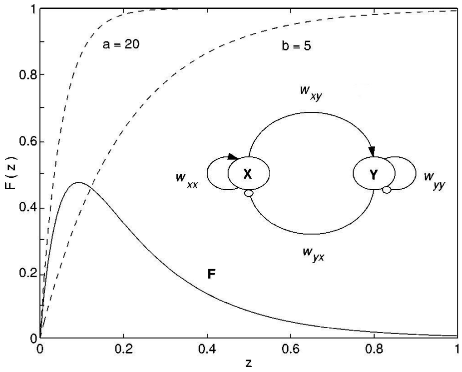


Abbildung: Das Dynamische System mit sigmoider Aktivierungsfunktion.

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Das Verhalten des Systems ohne externen Reiz ($I = 0$) eines einzelnen Neuronenpaares zeigt bei Variation der Parameter a und b Übergänge von Fixpunkt- zu periodischem und chaotischem Verhalten.

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind

1. $z_1^* = 0$
   - stabil für $F'(0) = a - b < 1$
2. z_2^*
   - löst Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind

1. $z_1^* = 0$
   - stabil für $F'(0) = a - b < 1$
2. z_2^*
   - löst Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$

Mit wachsendem a treten folgende Effekte auf

- z_1^* wird instabil und z_2^* stabil

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind

1. $z_1^* = 0$
   - stabil für $F'(0) = a - b < 1$
2. z_2^*
   - löst Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$

Mit wachsendem a treten folgende Effekte auf

- z_1^* wird instabil und z_2^* stabil
- z_2^* wird instabil und Orbit der Periode 2 tritt auf

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind

1. $z_1^* = 0$
   - stabil für $F'(0) = a - b < 1$
2. z_2^*
   - löst Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$

Mit wachsendem a treten folgende Effekte auf

- z_1^* wird instabil und z_2^* stabil
- z_2^* wird instabil und Orbit der Periode 2 tritt auf
- Periodenverdoppelungen

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind

1. $z_1^* = 0$
    - stabil für $F'(0) = a - b < 1$
2. z_2^*
    - löst Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$

Mit wachsendem a treten folgende Effekte auf

- z_1^* wird instabil und z_2^* stabil
- z_2^* wird instabil und Orbit der Periode 2 tritt auf
- Periodenverdoppelungen
- Chaos

Dynamik eines autonomen Neuronenpaares

$$z_{n+1} = F(z_n) = F_a(z_n) - F_b(z_n)$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind

1. $z_1^* = 0$
   - stabil für $F'(0) = a - b < 1$
2. z_2^*
   - löst Gleichung $z = \exp(-bz) - \exp(-az)$

Mit wachsendem a treten folgende Effekte auf

- z_1^* wird instabil und z_2^* stabil
- z_2^* wird instabil und Orbit der Periode 2 tritt auf
- Periodenverdoppelungen
- Chaos

Reaktion auf konstanten externen Reiz

Ein externer Input $I > 0$ verschiebt die Abbildung um den Betrag von I nach links.

$$z_{n+1} = \exp(-b(z + I)] - \exp(-a(z + I)]$$

- z_1^* kein Fixpunkt mehr

Reaktion auf konstanten externen Reiz

Ein externer Input $I > 0$ verschiebt die Abbildung um den Betrag von I nach links.

$$z_{n+1} = \exp(-b(z+I)] - \exp(-a(z+I)]$$

- z_1^* kein Fixpunkt mehr
- $z_2^* = z^*$ löst Gleichung $z = \exp[-b(z+I)] - \exp[-a(z+I)]$

Reaktion auf konstanten externen Reiz

Ein externer Input $I > 0$ verschiebt die Abbildung um den Betrag von I nach links.

$$z_{n+1} = \exp(-b(z + I)] - \exp(-a(z + I)]$$

- z_1^* kein Fixpunkt mehr
- $z_2^* = z^*$ löst Gleichung $z = \exp[-b(z + I)] - \exp[-a(z + I)]$
- Steigung bei z^* sinkt mit wachsendem I

Reaktion auf konstanten externen Reiz

Ein externer Input $I > 0$ verschiebt die Abbildung um den Betrag von I nach links.

$$z_{n+1} = \exp(-b(z + I)] - \exp(-a(z + I)]$$

- z_1^* kein Fixpunkt mehr
- $z_2^* = z^*$ löst Gleichung $z = \exp[-b(z + I)] - \exp[-a(z + I)]$
- Steigung bei z^* sinkt mit wachsendem I
- Chaos $\rightarrow$ periodische Orbits $\rightarrow$ Periodenhalbierungen $\rightarrow$ Fixpunktverhalten

Reaktion auf konstanten externen Reiz

Ein externer Input $I > 0$ verschiebt die Abbildung um den Betrag von I nach links.

$$z_{n+1} = \exp(-b(z + I)] - \exp(-a(z + I)]$$

- z_1^* kein Fixpunkt mehr
- $z_2^* = z^*$ löst Gleichung $z = \exp[-b(z + I)] - \exp[-a(z + I)]$
- Steigung bei z^* sinkt mit wachsendem I
- Chaos $\rightarrow$ periodische Orbits $\rightarrow$ Periodenhalbierungen $\rightarrow$ Fixpunktverhalten

Kritischer Input

- $z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$
- $F'(z) = -b\exp[-b(z + I)] + a\exp[-a(z + I)]$

Kritischer Input

- $z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$
- $F'(z) = -b \exp[-b(z + I)] + a \exp[-a(z + I)]$
- Prüfe, für welche I gilt $F'(z^*) > -1$

Kritischer Input

- $z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$
- $F'(z) = -b\exp[-b(z + I)] + a\exp[-a(z + I)]$
- Prüfe, für welche I gilt $F'(z^*) > -1$

Der kritische Wert für die Stabilität ist $F'(z^*) = -1$:

$$\begin{aligned} -1 &= -b\exp[-b(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* - b\exp[-a(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* + (a - b)\exp[-a(z^* + I_c)] \end{aligned}$$

Kritischer Input

- $z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$
- $F'(z) = -b\exp[-b(z + I)] + a\exp[-a(z + I)]$
- Prüfe, für welche I gilt $F'(z^*) > -1$

Der kritische Wert für die Stabilität ist $F'(z^*) = -1$:

$$\begin{aligned} -1 &= -b\exp[-b(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* - b\exp[-a(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* + (a-b)\exp[-a(z^* + I_c)] \end{aligned}$$

- z^* stabil für $I > I_c$

Kritischer Input

- $z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$
- $F'(z) = -b\exp[-b(z + I)] + a\exp[-a(z + I)]$
- Prüfe, für welche I gilt $F'(z^*) > -1$

Der kritische Wert für die Stabilität ist $F'(z^*) = -1$:

$$\begin{aligned} -1 &= -b\exp[-b(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* - b\exp[-a(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* + (a - b)\exp[-a(z^* + I_c)] \end{aligned}$$

- z^* stabil für $I > I_c$

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a}[\ln(\mu a) - 1] \text{ mit } \mu = \frac{b}{a}$$

Kritischer Input

- $z^* = \exp[-b(z^* + I)] - \exp[-a(z^* + I)]$
- $F'(z) = -b\exp[-b(z + I)] + a\exp[-a(z + I)]$
- Prüfe, für welche I gilt $F'(z^*) > -1$

Der kritische Wert für die Stabilität ist $F'(z^*) = -1$:

$$\begin{aligned} -1 &= -b\exp[-b(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* - b\exp[-a(z^* + I_c)] + a\exp[-a(z^* + I_c)] \\ &= -bz^* + (a - b)\exp[-a(z^* + I_c)] \end{aligned}$$

- z^* stabil für $I > I_c$

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a}[\ln(\mu a) - 1] \text{ mit } \mu = \frac{b}{a}$$

Parameterwahl nach Aufgabenstellung

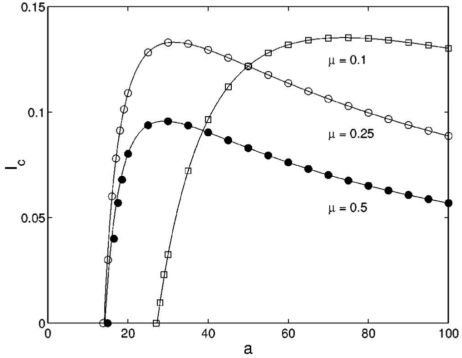


Abbildung: Kritischer Wert (I_c) bei dem der Übergang von periodischem zu Fixpunktverhalten stattfindet. Die Kreise und Quadrate sind Werte, welche numerisch berechnet wurden.

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a}[\ln(\mu a) - 1]$$

Segmentierung von Regionen der Intensitäten $I_1 < I_2$:

- μ festhalten, a so wählen, dass gilt $I_1 < I_c < I_2$

Parameterwahl nach Aufgabenstellung

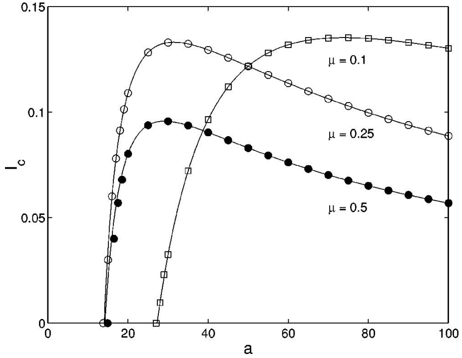


Abbildung: Kritischer Wert (I_c) bei dem der Übergang von periodischem zu Fixpunktverhalten stattfindet. Die Kreise und Quadrate sind Werte, welche numerisch berechnet wurden.

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a}[\ln(\mu a) - 1]$$

Segmentierung von Regionen der Intensitäten $I_1 < I_2$:

- μ festhalten, a so wählen, dass gilt $I_1 < I_c < I_2$
- Elemente mit Input I_1 zeigen periodisches Verhalten

Parameterwahl nach Aufgabenstellung

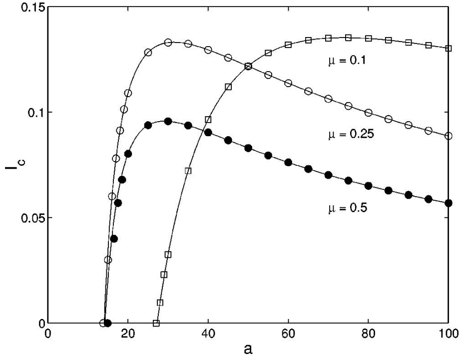


Abbildung: Kritischer Wert (I_c) bei dem der Übergang von periodischem zu Fixpunktverhalten stattfindet. Die Kreise und Quadrate sind Werte, welche numerisch berechnet wurden.

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a}[\ln(\mu a) - 1]$$

Segmentierung von Regionen der Intensitäten $I_1 < I_2$:

- μ festhalten, a so wählen, dass gilt $I_1 < I_c < I_2$
- Elemente mit Input I_1 zeigen periodisches Verhalten
- Elemente mit Input I_2 zeigen Fixpunktverhalten

Parameterwahl nach Aufgabenstellung

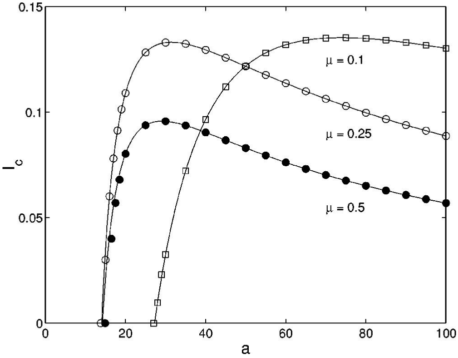


Abbildung: Kritischer Wert (I_c) bei dem der Übergang von periodischem zu Fixpunktverhalten stattfindet. Die Kreise und Quadrate sind Werte, welche numerisch berechnet wurden.

$$I_c = \frac{1 - \frac{2}{\mu}}{(\mu a)^{\frac{1}{\mu}} - \frac{a}{\mu}} + \frac{1}{\mu a}[\ln(\mu a) - 1]$$

Segmentierung von Regionen der Intensitäten $I_1 < I_2$:

- μ festhalten, a so wählen, dass gilt $I_1 < I_c < I_2$
- Elemente mit Input I_1 zeigen periodisches Verhalten
- Elemente mit Input I_2 zeigen Fixpunktverhalten

Verknüpfung von Neuronen

- Verknüpfungen mit benachbarten Neuronen gleicht Unstetigkeiten in Segmentierung aus
- Betrachte diskrete Approximationen von kreisförmigen Umgebungen der Radien R_{ex} und R_{in} $(R = 1, 2)$

Verknüpfung von Neuronen

- Verknüpfungen mit benachbarten Neuronen gleicht Unstetigkeiten in Segmentierung aus
- Betrachte diskrete Approximationen von kreisförmigen Umgebungen der Radien R_{ex} und R_{in} ($R = 1, 2$)

Für $R_{ex} = R_{in}$ gilt für das i-te Neuronenpaar

$$z_{n+1}^{i} = F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right)$$

Verknüpfung von Neuronen

- Verknüpfungen mit benachbarten Neuronen gleicht Unstetigkeiten in Segmentierung aus
- Betrachte diskrete Approximationen von kreisförmigen Umgebungen der Radien R_{ex} und R_{in} $(R = 1, 2)$

Für $R_{ex} = R_{in}$ gilt für das i-te Neuronenpaar

$$z_{n+1}^{i} = F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_n^j + I\right)$$

- Agenommen i-tes Neuronenpaar erhält Input I, umgebende Elemente I' mit $(I < I_c < I')$

Verknüpfung von Neuronen

- Verknüpfungen mit benachbarten Neuronen gleicht Unstetigkeiten in Segmentierung aus
- Betrachte diskrete Approximationen von kreisförmigen Umgebungen der Radien R_{ex} und R_{in} $(R = 1, 2)$

Für $R_{ex} = R_{in}$ gilt für das i-te Neuronenpaar

$$z_{n+1}^{i} = F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_n^j + I\right)$$

- Agenommen i-tes Neuronenpaar erhält Input I, umgebende Elemente I' mit $(I < I_c < I')$
- Ohne Verknüpfungen zeigt i-tes Neuronenpaar periodisches Verhalten, umgebende Elemente Fixpunktverhalten

Verknüpfung von Neuronen

- Verknüpfungen mit benachbarten Neuronen gleicht Unstetigkeiten in Segmentierung aus
- Betrachte diskrete Approximationen von kreisförmigen Umgebungen der Radien R_{ex} und R_{in} $(R = 1, 2)$

Für $R_{ex} = R_{in}$ gilt für das i-te Neuronenpaar

$$z_{n+1}^{i} = F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|} \sum_{j \in R_{ex}} z_n^j + I \right)$$

- Agenommen i-tes Neuronenpaar erhält Input I, umgebende Elemente I' mit $(I < I_c < I')$
- Ohne Verknüpfungen zeigt i-tes Neuronenpaar periodisches Verhalten, umgebende Elemente Fixpunktverhalten

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert
- Annahme: $|z_n^i - z^*| \ll 1$

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert
- Annahme: $|z_n^i - z^*| \ll 1$
- Betrachte Linearisierung der Gleichung am Punkt $z = 2z^* + I$

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert
- Annahme: $|z_n^i - z^*| \ll 1$
- Betrachte Linearisierung der Gleichung am Punkt $z = 2z^* + I$

$$\delta z_n^i = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=2z^*+I} \delta z_{n-1}^i .$$

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert
- Annahme: $|z_n^i - z^*| \ll 1$
- Betrachte Linearisierung der Gleichung am Punkt $z = 2z^* + I$

$$\delta z_n^i = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=2z^*+I} \delta z_{n-1}^i.$$

- Voraussetzung: $I_c - I < z^*$ und $-1 < \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=2z^*+I} < 0$

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert
- Annahme: $|z_n^i - z^*| \ll 1$
- Betrachte Linearisierung der Gleichung am Punkt $z = 2z^* + I$
$$\delta z_n^i = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=2z^*+I} \delta z_{n-1}^i.$$
- Voraussetzung: $I_c - I < z^*$ und $-1 < (\frac{\partial F}{\partial z})_{z=2z^*+I} < 0$
- $\delta z_n^i \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$

Verknüpfung von Neuronen

Betrachte schrittweise Änderung der Aktivität des i-ten Paares

$$\begin{aligned}\delta z_n^i &= z_{n+1}^i - z_n^i \\ &= F\left(z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_n^j + I\right) - F\left(z_{n-1}^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{j\in R_{ex}} z_{n-1}^j + I\right)\end{aligned}$$

- Alle Nachbarelemente sind gegen Fixpunkt konvergiert
- Annahme: $|z_n^i - z^*| \ll 1$
- Betrachte Linearisierung der Gleichung am Punkt $z = 2z^* + I$

$$\delta z_n^i = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=2z^*+I} \delta z_{n-1}^i .$$

- Voraussetzung: $I_c - I < z^*$ und $-1 < (\frac{\partial F}{\partial z})_{z=2z^*+I} < 0$
- $\delta z_n^i \to 0$ für $n \to \infty$

Auswirkung der Radien

Dynamik eines autonomen Netzwerks gekoppelter Neuronen im Allgemeinen

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} x_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i\in R_{in}} y_n^i\right)$$

umgeformt zu $(x_n^i - y_n^i = z_n^i)$

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} y_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i\in R_{in}} y_n^i\right)$$

Auswirkung der Radien

Dynamik eines autonomen Netzwerks gekoppelter Neuronen im Allgemeinen

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} x_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i\in R_{in}} y_n^i\right)$$

umgeformt zu $(x_n^i - y_n^i = z_n^i)$

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} y_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i\in R_{in}} y_n^i\right)$$

Für $R_{ex} = R_{in}$ ergibt sich die oben schon verwendete Form

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} z_n^i\right)$$

Auswirkung der Radien

Dynamik eines autonomen Netzwerks gekoppelter Neuronen im Allgemeinen

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i \in R_{ex}} x_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i \in R_{in}} y_n^i\right)$$

umgeformt zu $(x_n^i - y_n^i = z_n^i)$

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i \in R_{ex}} z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i \in R_{ex}} y_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i \in R_{in}} y_n^i\right)$$

Für $R_{ex} = R_{in}$ ergibt sich die oben schon verwendete Form

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i \in R_{ex}} z_n^i\right)$$

welche gegen Zustand ständiger Aktivierung strebt

Auswirkung der Radien

Dynamik eines autonomen Netzwerks gekoppelter Neuronen im Allgemeinen

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} x_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i\in R_{in}} y_n^i\right)$$

umgeformt zu $(x_n^i - y_n^i = z_n^i)$

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} z_n^i + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} y_n^i - \frac{1}{|R_{in}|}\sum_{i\in R_{in}} y_n^i\right)$$

Für $R_{ex} = R_{in}$ ergibt sich die oben schon verwendete Form

$$z_{n+1} = F\left(z_n + \frac{1}{|R_{ex}|}\sum_{i\in R_{ex}} z_n^i\right)$$

welche gegen Zustand ständiger Aktivierung strebt.

Praktische Durchführung

1. Anfangsbedingungen des Netzes beliebig wählen
2. Bild liefert Input für die Neuronen

Praktische Durchführung

1. Anfangsbedingungen des Netzes beliebig wählen
2. Bild liefert Input für die Neuronen
3. Wähle a nach geeignetem I_c

Praktische Durchführung

1. Anfangsbedingungen des Netzes beliebig wählen
2. Bild liefert Input für die Neuronen
3. Wähle a nach geeignetem I_c
4. Neuronen, welche nach festgelegter Anzahl von Iterationen ihren sukzessiven Output nicht ändern (bis auf Fehler Θ) repräsentieren das Objekt, die Übrigen den Hintergrund

Praktische Durchführung

1. Anfangsbedingungen des Netzes beliebig wählen
2. Bild liefert Input für die Neuronen
3. Wähle a nach geeignetem I_c
4. Neuronen, welche nach festgelegter Anzahl von Iterationen ihren sukzessiven Output nicht ändern (bis auf Fehler Θ) repräsentieren das Objekt, die Übrigen den Hintergrund

Künstliches Bild

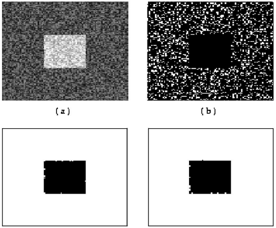


Abbildung: 200 Iterationen ($a = 20, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Das künstlich erzeugte Bild besteht aus

- Viereck der Intensität I_2 (das Objekt)
- Hintergrund der Intensität I_1 ($I_1 < I_2$)
- Rauschen der Stärke ϵ mit SNR=1 (Spektrum der Signalstärke durch Rauschintensität)
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks schlecht

Künstliches Bild

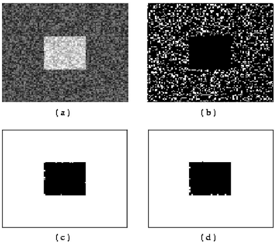


Abbildung: 200 Iterationen ($a = 20, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Das künstlich erzeugte Bild besteht aus

- Viereck der Intensität I_2 (das Objekt)
- Hintergrund der Intensität I_1 ($I_1 < I_2$)
- Rauschen der Stärke ϵ mit SNR=1 (Spektrum der Signalstärke durch Rauschintensität)
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks schlecht
- Kopplung segmentiert Bild bis auf Teile des Randes korrekt

Künstliches Bild

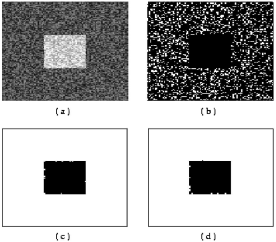


Abbildung: 200 Iterationen ($a = 20, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Das künstlich erzeugte Bild besteht aus

- Viereck der Intensität I_2 (das Objekt)
- Hintergrund der Intensität I_1 ($I_1 < I_2$)
- Rauschen der Stärke ϵ mit SNR=1 (Spektrum der Signalstärke durch Rauschintensität)
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks schlecht
- Kopplung segmentiert Bild bis auf Teile des Randes korrekt

Lincoln

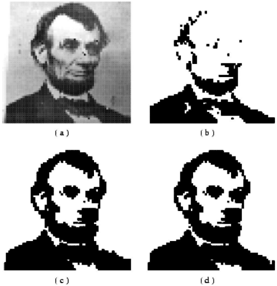


Abbildung: 300 Iterationen ($a = 30, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Die Abbildung zeigt ein 5-Bit Graustufenbild von Lincoln.

- I_c durch die Auswertung der Graustufen bestimmt

Lincoln

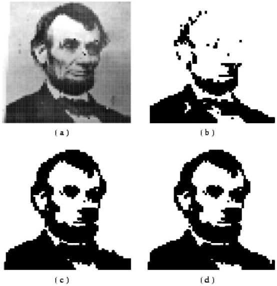


Abbildung: 300 Iterationen ($a = 30, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Die Abbildung zeigt ein 5-Bit Graustufenbild von Lincoln.

- I_c durch die Auswertung der Graustufen bestimmt
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks unbefriedigend

Lincoln

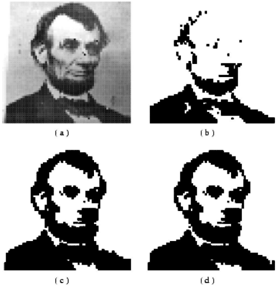


Abbildung: 300 Iterationen ($a = 30, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Die Abbildung zeigt ein 5-Bit Graustufenbild von Lincoln.

- I_c durch die Auswertung der Graustufen bestimmt
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks unbefriedigend
- Kopplung verbessert Segmentierung erheblich

Lincoln

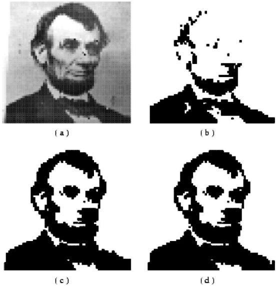


Abbildung: 300 Iterationen ($a = 30, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Die Abbildung zeigt ein 5-Bit Graustufenbild von Lincoln.

- I_c durch die Auswertung der Graustufen bestimmt
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks unbefriedigend
- Kopplung verbessert Segmentierung erheblich
- für das gesamte Bild a (und damit I_c) einheitlich gewählt

Lincoln

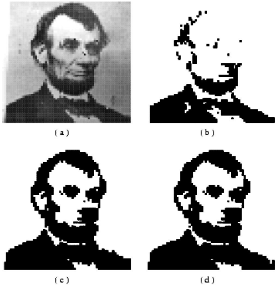


Abbildung: 300 Iterationen ($a = 30, \mu = 0{,}25$ und Schwellenwert $\Theta = 0{,}02$): (a) Original, (b) Output ungekoppelt, (c) gekoppelt mit $R_{ex} = 1, R_{in} = 2$ und (d) gekoppelt mit $R_{ex} = R_{in} = 2$.

Die Abbildung zeigt ein 5-Bit Graustufenbild von Lincoln.

- I_c durch die Auswertung der Graustufen bestimmt
- Leistung des ungekoppelten Netzwerks unbefriedigend
- Kopplung verbessert Segmentierung erheblich
- für das gesamte Bild a (und damit I_c) einheitlich gewählt