6. Übung zur Funktionentheorie 2: Riemannsche Flächen

Abgabe: Donnerstag, 21. Mai vor der Übung

Aufgabe 1
Seien abelsche Gruppen und Homomorphismen wie im folgenden Diagramm gegeben.

$$\begin{tikzcd} C^0 \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "t_0"'] & C^1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "t_1"'] & C^2 \arrow[d, "t_2"'] \\ \hat{C}^0 \arrow[r, "\hat{\delta}_0"] & \hat{C}^1 \arrow[r, "\hat{\delta}_1"] & \hat{C}^2 \end{tikzcd}$$

Wir nehmen an, dass $\delta_1\delta_0 = 0$ und $\hat{\delta}_1\hat{\delta}_0 = 0$, so dass wir Gruppen $H := \ker\delta_1/\operatorname{im}\delta_0$ und $\hat{H} := \ker\hat{\delta}_1/\operatorname{im}\hat{\delta}_0$ definieren können. Wir nehmen weiter an, dass im obigen Diagramm beide Quadrate kommutieren, dass also $t_{k+1}\delta_k = \hat{\delta}_k t_k$ für $k = 0, 1$ gilt.

Zeige, dass durch t ein Homomorphismus $H \to \hat{H}$ definiert wird.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{F}$ eine PRÄgarbe auf dem topologischen Raum X, und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Genau wie für Garben definiert man Cohomologiegruppen $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und Homomorphismen $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\colon H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ falls $\mathcal{V}$ eine feinere offene Überdeckung von X ist.
Gib ein (möglichst konkretes) Beispiel von Daten $(X, \mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ so dass $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ NICHT injektiv ist.

Aufgabe 3
Sei X eine Riemannsche Fläche und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Zeige, dass $H^1(X, \mathcal{F})$ mit repräsentantenweiser Addition zu einer abelschen Gruppe wird.

Aufgabe 4
Sei X eine Riemannsche Fläche und sei $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{0,1}$ die Garbe der differenzierbaren 1-Formen vom Typ (0,1). Zeige, dass $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.