Universität Hamburg | Topologie | Sommer 2011
Janko Latschev

Übungsstunde 3

1. Wir haben auf $[0,1]^2$ und auf $\mathbb{R}^2$ die von der lexikografischen Ordnung induzierte Ordnungstopologie τ_{ord} betrachtet.

a) Vergleichen Sie $([0,1]^2, \tau_{ord})$ mit der auf $[0,1]^2$ von $(\mathbb{R}^2, \tau_{ord})$ induzierten Teilraumtopologie!

b) Zeigen Sie, dass $([0,1]^2, \tau_{ord})$ lokal zusammenhängend aber nicht lokal wegzusammenhängend ist. Was sind die Wegzusammenhangskomponenten?

c) Ist $([0,1]^2, \tau_{ord})$ kompakt?

2. Sei X ein beliebiger topologischer Raum.

a) Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Folgt daraus, dass $\operatorname{Int} A$ und $\operatorname{Fr} A$ zusammenhängend sind?

b) Seien umgekehrt $\operatorname{Int} A$ und $\operatorname{Fr} A$ zusammenhängend. Folgt daraus, dass A zusamenhängend ist?

3. Sei $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ eine absteigende Folge abgeschlossener, zusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Ist

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

zusammenhängend?

4. Wir sagen, dass eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in einem topologischen Raum X gegen den Punkt $a \in X$ konvergiert, wenn es zu jeder offenen Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

a) Untersuchen Sie die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ bezüglich der Topologie der endlichen Komplemente!

b) Zeigen Sie, dass in einem Hausdorff–Raum jede Folge höchstens einen Grenzwert hat!