

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 1

Präsenzaufgaben

(P1) Beweisen Sie, dass die drei in der Vorlesung formulierten Charakterisierungen glatter Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ in der Tat äquivalent sind:

- a) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ (mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen), so dass

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

- b) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass für alle $p \in U$ die Ableitung $d\psi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ vollen Rang $n - k$ hat und $U \cap M = \psi^{-1}(0)$ gilt.¹

- c) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine offene Teilmenge $V^* \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine glatte Abbildung $\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass für jedes $y \in V^*$ die Ableitung $d\varphi_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vollen Rang k hat und φ die Menge V^* homöomorph auf $U \cap M$ abbildet.

(P2) In der Vorlesung haben wir folgendes Beispiel betrachtet: $Y = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$, und $X = Y / \sim$, wobei

$$(t_1, n_1) \sim (t_2, n_2) \quad : \iff \quad (t_1, n_1) = (t_2, n_2) \text{ oder } t_1 = t_2 < 0 \text{ und } n_1, n_2 \text{ beliebig}$$

Für $n \in \{0, 1\}$ betrachten wir die Einbettungen $\iota_n : \mathbb{R} \rightarrow X$, definiert als $\iota_n(t) = [(t, n)]$, und nennen eine Teilmenge $U \subset X$ genau offen, wenn $\iota_0^{-1}(U)$ und $\iota_1^{-1}(U)$ offen in \mathbb{R} sind. Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachten Behauptungen:

- a) Die beschriebenen offenen Teilmengen von X definieren in der Tat eine Topologie.
b) Jeder Punkt in X besitzt eine zu \mathbb{R} homöomorphe Umgebung.
c) X ist kein Hausdorff-Raum.

¹Kommt man hier auch mit der schwächeren Bedingung aus, dass $d\psi_p$ für alle $p \in U \cap M$ vollen Rang hat?

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 13.4., in der Vorlesung

(A1) Wann ist ein topologischer Raum eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Vorlesung? Gibt es in diesem Fall einen Unterschied zwischen topologischen und glatten Mannigfaltigkeiten?

(A2) Für $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Teilmenge

$$H_c^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = c\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Skizzieren Sie H_1^2 , H_0^2 und H_{-1}^2 !
- Geben Sie einen glatten Atlas auf H_1^2 an! Zeigen sie auch, dass die Kartenwechsel glatte Abbildungen sind!
- Zeigen Sie, dass H_0^n für $n > 0$ keine glatte Mannigfaltigkeit ist!

(A3) Sei $\mathcal{S} \subset \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ der lineare Unterraum der symmetrischen Matrizen, und sei $F : \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}$ die Abbildung $F(A) := A^T A$.

- Bestimmen Sie das Differential von F in einem Punkt $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$.
- Zeigen Sie: Ist $A^T A = \mathbb{1}$, so ist dF_A surjektiv.
- Schließen Sie hieraus, dass die orthogonale Gruppe

$$O(n) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie deren Dimension.