Janko Latschev, Fabian Kirchner,
Giorgio Laguzzi

Übungsstunde 3

1. Zu welchen bekannten Räumen sind die folgenden Quotientenräume homöomorph?[1]

a) die Verklebung von zwei abgeschlossenen Bällen D^n entlang der Identität als Abbildung zwischen den beiden Randsphären.

b) der Quotient von $\mathbb{R}^2$ bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Wirkung durch Multiplikation mit ± 1.

c) der Quotient des Zylinders $S^1 \times [0,1]$ bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Wirkung, welche durch

$$1 \bullet (e^{\mathbf{i}\vartheta}, t) = (e^{\mathbf{i}\vartheta}, t) \quad , \quad (-1) \bullet (e^{\mathbf{i}\vartheta}, t) = (e^{\mathbf{i}(\vartheta+\pi)}, 1-t)$$

beschrieben wird.

2. **a)** Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Folgt daraus, dass $\operatorname{Int} A$ und $\operatorname{Fr} A$ zusammenhängend sind?

b) Seien umgekehrt $\operatorname{Int} A$ oder $\operatorname{Fr} A$ zusammenhängend. Folgt daraus, dass A zusammenhängend ist?

3. Ist für jede absteigende Folge $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ abgeschlossener, zusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ der Durchschnitt

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

zusammenhängend?

4. Wir haben auf $[0,1]^2$ und auf $\mathbb{R}^2$ die von der lexikografischen Ordnung induzierte Ordnungstopologie τ_{ord} betrachtet.

a) Vergleichen Sie $([0,1]^2, \tau_{ord})$ mit der auf $[0,1]^2$ von $(\mathbb{R}^2, \tau_{ord})$ induzierten Teilraumtopologie!

b) Zeigen Sie, dass $([0,1]^2, \tau_{ord})$ lokal zusammenhängend aber nicht lokal wegzusammenhängend ist. Was sind die Wegzusammenhangskomponenten?

***** Zu welchen bekannten Räumen sind die folgenden Quotientenräume homöomorph?

c) der Quotient $M/\partial M$ des Möbiusbandes, wobei ∂M den Rand von M als Mannigfaltigkeit bezeichnet.

d) die Verklebung des Möbiusbandes M und des Kreises S^1 entlang der Abbildung $f\colon \partial M \cong S^1 \to S^1, f(z) = z^2$. Hier bezeichnet ∂M den Rand des Möbiusbandes, und die Abbildung f ist die Verknüpfung zweier Abbildungen: die erste identifiziert diesen Rand mit dem Kreis $S^1 \in \mathbb{C}$, und die zweite bildet das Quadrat der erhaltenen komplexen Zahl.

[1] Wir fassen $\mathbb{Z}_2$ hier als die multiplikative Untergruppe $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf.