Beweis. Ist M eine k-dimensionale C^s-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, so können wir zu $\mathbf{x}_0 \in M$ eine Umgebung $\mathbf{x}_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$ nach Satz 14.1.15 vom lokalen Geradebiegen und einen Diffeomorphismus $\Psi : W \to Z \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ finden, so dass $\Psi(W \cap M) = Z \cap \mathbb{R}^k$. Dann ist

$$\Psi^k = \Psi_{|_{M \cap W}} : M \cap W \to U = Z \cap \mathbb{R}^k$$

ein Homöomorphismus und $(\Psi^k)^{-1} : U \to M \cap W = V$ ein Homöomorphismus, ja sogar eine stetig differenzierbare Abbildung, wobei der Rang der Ableitung in jedem Punkt natürlich höchstens k ist. Sind p_j die Komponentenfunktionen von Ψ^{-1}, so ist für $\mathbf{y}_0 \in V$

$$\mathrm{D}\Psi^{-1}(\mathbf{y}_0) = \left(\frac{\partial p_j(\mathbf{y}_0)}{\partial y_m}\right)_{j=1,\dots,n,\ m=1,\dots,n}.$$

Dann ist $(\Psi^k)^{-1} = (p_{1|_{V_k}}, \dots, p_{n|_{V_k}})$ und

$$\mathrm{D}(\Psi^k)^{-1}(\mathbf{y}_0) = \left(\frac{\partial p_j(\mathbf{y}_0)}{\partial y_m}\right)_{j=1,\dots,n,\ m=1,\dots,k}.$$

Dies sind genau die ersten k Spalten der Matrix $\mathrm{D}\Psi^{-1}(\mathbf{y}_0)$. Diese sind natürlich linear unabhängig, ansonsten könnte $\mathrm{D}\Psi^{-1}$ nicht vollen Rang haben.

Die Umkehrung ist gerade der letzte Satz. □

Definition 14.1.22 (Karte)
Ein Paar (U, ψ_U) aus Satz 14.1.21 heißt Karte. Wir bezeichnen $\psi_U(U)$ als Kartengebiet *der Karte (U, ψ_U).*

Bemerkung 14.1.23 (Verkleinern von Karten)
Ist (U, ψ_U) eine Karte und $\tilde{U} \subset U$ offen, so ist $(\tilde{U}, \psi_{U_{|_{\tilde{U}}}})$ wiederum eine Karte. Oft sagt man durch Verkleinern kann man erreichen, dass ... Damit meint man genau den hier angesprochenen Vorgang.

Satz 14.1.24 (Kartenwechsel)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^s des $\mathbb{R}^n$, seien $\psi_1 : U_1 \to M$, $\psi_2 : U_2 :\to M$ Karten mit $\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2) \neq \emptyset$. Dann ist

$$\psi_2^{-1}\psi_1 : \psi_1^{-1}(\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)) \to \psi_2^{-1}(\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2))$$

ein Diffeomorphismus.

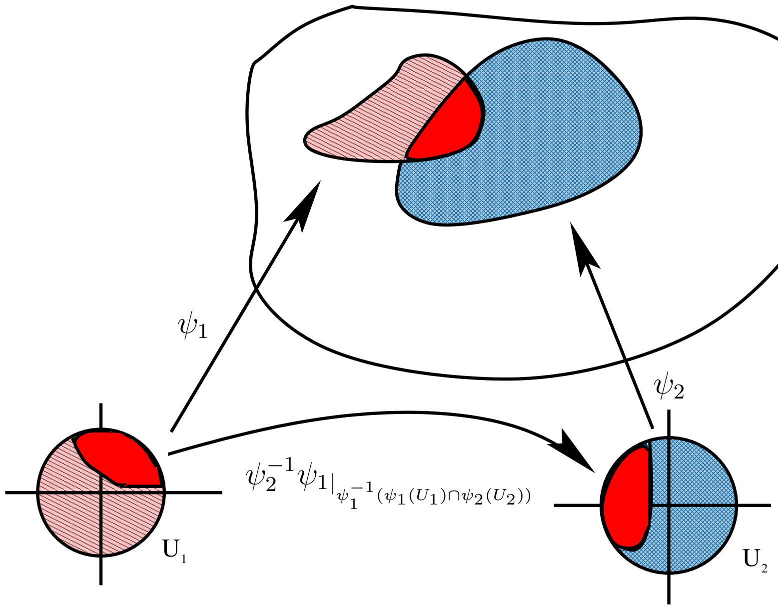

Abbildung 14.2: Kartenwechsel auf einer Mannigfaltigkeit

Beweis. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass die Mengen $\psi_i(U_i)$ offen sind, dass deren Schnitt offen ist und damit auch $\psi_i^{-1}(\psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2))$ für $i = 1, 2$. Weiterhin sind die Abbildungen ψ_i Bijektionen und in beide Richtungen stetig, damit folgt sofort, dass die angegebene Abbildung ein Homöomorphismus ist. Die Eigenschaft eines Diffeomorphismus ist etwas schwerer zu beweisen, da wir nichts über die Glattheitseigenschaften von ψ_i^{-1} sagen können, da diese Abbildung ja nicht auf einer offenen Menge im Raum $\mathbb{R}^n$ definiert ist und daher Differenzierbarkeitseigenschaften nicht definiert sind.

Dazu nutzen wir wiederum den Satz vom lokalen Geradebiegen, wie es Abbildung 14.3 andeutet. Es sei $\mathbf{x}_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \cap W \subset \psi_1(U_1) \cap \psi_2(U_2)$ und $\mathbf{F} : W \to Z \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ein Diffeomorphismus mit $\mathbf{F}(M \cap W) \subset \mathbb{R}^k$. Dann ist

$$\mathbf{F}^k : M \cap W \to \mathbb{R}^k : \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ \Psi_k(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

eine Abbildung, so dass

$$\mathbf{F}^k \circ \psi_1 : U_1 \cap \psi_1^{-1}(W) \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbar ist und an der Stelle $\psi_1^{-1}(\mathbf{x}_0)$ den Rang k hat. Gleiches gilt für

$$\mathbf{F}^k \circ \psi_2 : U_2 \cap \psi_2^{-1}(W) \to \mathbb{R}^k.$$

Damit gibt es $\tilde{U}_i \subset U_i \cap \psi_i^{-1}(W \cap M)$ und $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$, so dass die Abbildungen $\mathbf{F}^k \circ \psi_i : \tilde{U}_i \to \tilde{V}$ Diffeomorphismen sind. Dann ist

$$\psi_2^{-1}\psi_1 = (\mathbf{F}^k \circ \psi_2)^{-1}(\mathbf{F}^k \circ \psi_1)$$

ein Diffeomorphismus. □

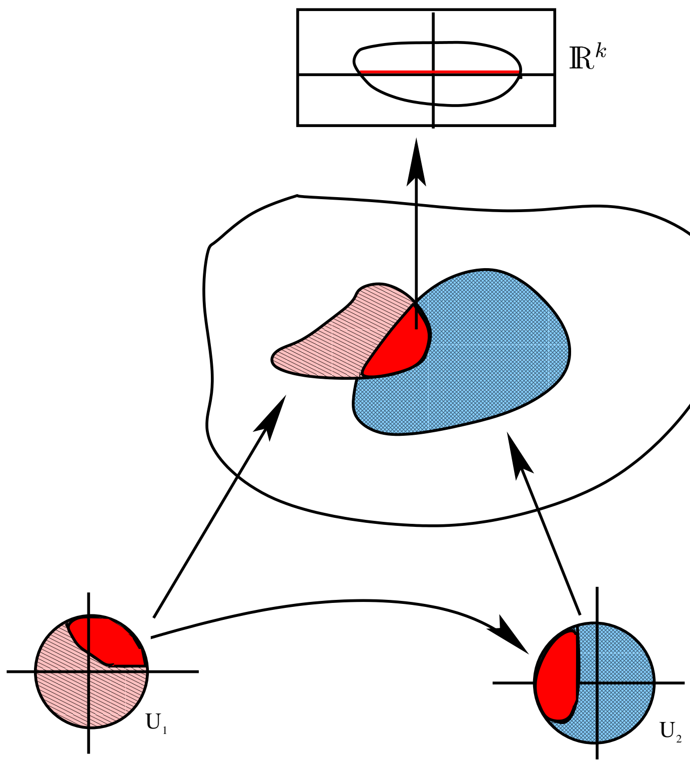

Abbildung 14.3: Ausnutzen des lokalen Geradebiegens

Definition 14.1.25 (Kartenwechseldiffeomorphismus)
Sind (U, ψ_U), (V, ψ_V) zwei Karten mit überlappenden Kartengebieten. Den Diffeomorphismus $\psi_{UV} = \psi_V^{-1} \circ \psi_U : \psi_U^{-1}(\psi_U(U) \cap \psi_V(V)) \to \psi_V^{-1}(\psi_U(U) \cap \psi_V(V))$ nennen wir den Kartenwechseldiffeomorphismus.