Damit haben wir die Ungleichung

$$\Phi(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(X_n).$$

Für die Umkehrung nehmen wir o.B.d.A. an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Phi(X_n) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir eine Treppenfunktion $0 \leq \varphi \leq f$ mit

$$\int\limits_{X_1} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{X_1} \varphi \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon, \ \int\limits_{X_2} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{X_2} \varphi \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon.$$

Dann ist

$$\Phi(X_1 \cup X_2) \geq \int\limits_{X_1 \cup X_2} \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X_1} \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{X_2} \varphi \, \mathrm{d}\mu \geq \Phi(X_1) + \Phi(X_2) - 2\varepsilon.$$

Also hat man

$$\Phi(X_1 \cup X_2) \geq \Phi(X_1) + \Phi(X_2).$$

Allgemeiner folgt dann

$$\Phi(X_1 \cup \cdots \cup X_n) \geq \Phi(X_1) + \cdots + \Phi(X_n).$$

Damit folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi(X) \geq \Phi(X_1 \cup \cdots \cup X_n) \geq \Phi(X_1) + \cdots + \Phi(X_n)$$

und damit

$$\Phi(X) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(X_i).$$

Zuletzt muss noch der allgemeine Fall einer vorzeichenwechselnden Funktion betrachtet werden.
Sei $f = f^+ - f^-$, dann gilt die Aussage für f^+ und f^- jeweils einzeln aufgrund des vorherigen Schrittes, dann gilt sie natürlich auch für f. □

Korollar 12.6.7 (Nullmengen)
Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $X \in \mathfrak{A}$ und $Y \subset X$ mit $\mu(X \setminus Y) = 0$. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Aus Y und $X \setminus Y$ messbar, $X = Y \cup (X \setminus Y)$ folgt unmittelbar

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{X \setminus Y} f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

Die letzte Gleichheit begründet sich aus der Tatsache, dass $X \setminus Y$ nach Voraussetzung eine Nullmenge ist und damit das Integral über $X \setminus Y$ nach Satz 12.6.5 Punkt 5 verschwindet. □

Bemerkung 12.6.8 (Bedeutung der Nullmengen)
Das Korollar zeigt, dass Nullmengen für die Integrationstheorie keine Rolle spielen, eine Beobachtung von eminenter Bedeutung, die auch viele Beweise technisch schwieriger macht, da wir auch in den Voraussetzungen Nullmengen ignorieren wollen und werden. Den technisch wichtigsten Schritt in diese Richtung macht die folgende Definition.

Definition 12.6.9 (Äquivalenz und Nullmenge)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein vollständiger Maßraum. Sei* $X \in \mathfrak{A}$*. Für Funktionen* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *führen folgende Relation ein:* $f \sim g \iff \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \neq g(x) \right\}$ *ist* Nullmenge*, d. h.* $\mu(\left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \neq g(x) \right\}) = 0$.

Definition 12.6.10 (fast überall)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein vollständiger Maßraum. Gilt eine Eigenschaft für alle Punkte außerhalb einer Nullmenge, so sagen wir, die Eigenschaft gilt* fast überall*. Wir schreiben dafür die Eigenschaft gilt* $(f\ddot{u})$.

Lemma 12.6.11 (Äquivalenzrelation)
$\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellwertigen Funktionen.*

Beweis. Zu zeigen sind Symmetrie, Reflexivität und Transitivität. Dabei sind die Symmetrie und Reflexivität offensichtlich und die Transitivität einfach eine Konsequenz aus der Tatsache, dass die Vereinigung von zwei Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. □

Aufgabe 12.6.12 (Monotonie des Integrals)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f \leq g$ $(f\ddot{u})$, so ist für jedes $X \in \mathfrak{A}$

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Satz 12.6.13 (Integral des Betrages einer Funktion)
Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $X \in \mathfrak{A}$ *messbar und* $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$*. Dann gilt*

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir setzen $Y_+ = \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \geq 0 \right\}$ und $Y_- = \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) < 0 \right\}$, so dass $X = Y_+ \cup Y_-$. $|f|$ messbar und es gilt

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{Y_+} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{Y_-} (-f) \, \mathrm{d}\mu = \int_{Y_+} f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_{Y_-} f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Damit ist $|f| \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Weiter ist $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$, also

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu, -\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X (-f) \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$$

und damit

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Satz 12.6.14 (Bedeutung einer integrierbaren Schranke)
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $X \in \mathfrak{A}$ *und* $f, g : X \to \mathbb{R}_{erw}$ *messbar. Ist* $g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ *und* $|f| \leq g$ *(fü), so ist* $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$*.*

Beweis. Es gilt $f^+ \leq g$ (*fü*), $f^- \leq g$ (*fü*), also ist $X = Y \cup (Y \setminus X)$ mit $\mu(X \setminus Y) = 0$ und f^+, $f^- \leq g$ auf Y. Also ist

$$\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_Y f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus Y} f^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu + 0 < \infty,$$

ganz entsprechend

$$\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

und $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. □

12.7 Konvergenzsätze

Eine wichtige Eigenschaft de Lebesgue-Integales sind die Sätze zur Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration.

Satz 12.7.1 (Satz von der monotonen Konvergenz (Lebesgue))
Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $X \in \mathfrak{A}$ *und* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reellwertiger, messbarer Funktionen* $f_n : X \to \mathbb{R}$*. Sei* f_n *eine* ($f\ddot{u}$) *monoton steigende Folge, d. h. gilt*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) < \ldots \quad (f\ddot{u})$$

auf X*. Sei* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(f\ddot{u})$*. Dann gilt:*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $A \in \mathbb{R}_{erw}$ mit

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Der Grenzwert existiert, da die Folge

$$\left\{ \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

monoton steigend ist. Da $f_n \le f$ $(f\ddot{u})$ gilt auch (nach Aufgabe 12.6.12)

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

und damit

$$A \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Wir müssen noch die umgekehrte Ungleichung beweisen. Dazu sei s eine beliebige Treppenfunktion mit $0 \le s \le f$, wir wollen zeigen, dass

$$\int_X s \,\mathrm{d}\mu \le A.$$

Ist dies gezeigt, dann folgt auch, dass das Supremum über alle solchen s durch A abgeschätzt wird. Sie also s fest gewählt. Dann sei $c \in (0,1)$ eine Zahl. Setze

$$Y_n = \left\{ x \in X \,\middle|\, f_n(x) > cs(x) \right\}.$$

Aufgrund der Monotonie folgt $Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset \ldots$. Weiterhin hat

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

die Eigenschaft $\mu(X \setminus Y) = 0$, da die Folge $(f\ddot{u})$ konvergiert. Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{Y_n} cs \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{Y_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq A.$$

Da Y als abzählbare Vereinigung der $Z_n = Y_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Y_j$ dargestellt werden kann, und wegen der abzählbaren Additivität der Funktion Φ aus Satz 12.6.6 folgt

$$\begin{aligned}
\int_Y cs \, \mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n} cs \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Z_n} cs \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{Z_n} cs \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{Y_n} cs \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_{Y_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_{Y_n} f \, \mathrm{d}\mu \leq A.
\end{aligned}$$

Da $c \in (0,1)$ beliebig ist, können wir den Grenzwert $c \to 1$ bilden und erhalten

$$\int_Y s \, \mathrm{d}\mu \leq A.$$

Damit ist mit der Vorbemerkung der Beweis erbracht. □

Satz 12.7.2 (Summen)
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $X \in \mathfrak{A}$. Es seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Dann ist $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{L}(X, \mu)$ und es gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $f_i \geq 0$ $(f\ddot{u})$. Nach Satz 12.5.4 gibt es zu f_i, $i = 1, 2$ Treppenfunktionen s_i^n, $i = 1, 2$ mit $\lim_{n\to\infty} s_i^n = f_i$. Da $f_i \geq 0$ können die Folgen monoton steigend gewählt werden. Dann gilt mit $s^n = s_1^n + s_2^n$ auch $s^n \to f$ und

$$\int_X s^n \, \mathrm{d}\mu = \int_X s_1^n \, \mathrm{d}\mu + \int_X s_2^n \, \mathrm{d}\mu.$$

Der Lebesguesche Satz von der monotonen Konvergenz erlaubt den Übergang zum Grenzwert und beweist den Satz.

Im allgemeinen Fall zerlegen wir X in vier disjunkte Mengen $X_1, \ldots, X_4$:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left\{ x \in X \;\middle|\; f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) \geq 0 \right\} \\
X_2 &= \left\{ x \in X \;\middle|\; f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) < 0 \right\} \\
X_3 &= \left\{ x \in X \;\middle|\; f_1(x) < 0,\ f_2(x) \geq 0 \right\} \\
X_4 &= \left\{ x \in X \;\middle|\; f_1(x) < 0,\ f_2(x) < 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Die Beweise im ersten und im letzten Fall sind einfach. Der zweite und dritte Fall benötigen eine Idee: Mit $X_2^+ = \left\{ x \in X_2 \;\middle|\; f(x) \geq 0 \right\}$ und $X_2^- = X_2 \setminus X_2^+$ und $f_1 = f + f_2$ auf X_2^+ ergibt der erste Schritt gibt wieder die Aussage. Entsprechendes gilt für X_2^- und für X_3.

$\square$

Satz 12.7.3 (Reihen nichtnegativer integrierbarer Funktionen)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen auf $X \in \mathfrak{A}$. Dann gilt mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad (f\ddot{u})$$

die Gleichung

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_X f_i \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Die Partialsummenfolge $s_n = \sum_{j=1}^n f_j$ der $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, also können wir den Lebesgueschen Satz von der monotonen Konvergenz Satz 12.7.1 anwenden und schließen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X s_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Satz 12.7.4 (Fatou[4])
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $X \in \mathfrak{A}$ und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer, nichtnegativer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$. Setze $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir setzen

$$g_n(x) = \inf \left\{ f_j(x) \,\middle|\, j \geq n \right\}.$$

Dann ist die Folge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und monoton und jedes g_n messbar. Also konvergiert die Funktionenfolge g_n mit Grenzwert f (hier geht die Definition des Limesinferior ein, vgl. Definition 2.7.8). Der Lebesguesche Satz 12.7.1 von der monotonen Konvergenz gibt uns

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

[4] Pierre Joseph Louis Fatou (28.2.1878–10.8.1929) war ein bedeutender französischer Mathematiker, der nach einem Studium an der École Nationale Supérieure eine Position an der Sternwarte in Paris annahm. Dort trieb er seine mathematischen Studien fort und wartete mit bedeutenden Leistungen zur Integrationstheorie und Funktionentheorie auf.