Übungsblatt 10

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 17. Januar 2013.

1. Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Wir hatten definiert:

$$\mathsf{use}_e^B(n) := \begin{cases} \infty & \text{if } \varphi_e^B(n)\uparrow, \\ k & \text{if } \varphi_e^B(n)\downarrow \text{ and } k \text{ is the least} \\ & \quad \text{time index such that the machine halts.} \end{cases}$$

   Wir sagen, daß A *beschränkt Turing-reduzierbar* auf B ist, falls ein e und ein b existieren, so daß

   - $\chi_A = \varphi_e^B$,
   - b ist eine berechenbare Funktion, so daß für alle x, $\mathsf{use}_e^B(x) < b(x)$.

   Wir schreiben hierfür $A \leq_{\mathrm{bT}} B$.

   (a) Zeigen Sie, daß $\leq_{\mathrm{bT}}$ eine Präordnung ist (also reflexiv und transitiv).

   (b) Zeigen Sie, daß für jede berechenbare Menge A und jede beliebige Menge B gilt, daß $A \leq_{\mathrm{bT}} B$.

2. Wir hatten eine Menge A *limesberechenbar* genannt, falls eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ existiert, so daß

$$x \in A \iff \lim_{y \to \infty} f(x, y) = 1, \text{ und}$$
$$x \notin A \iff \lim_{y \to \infty} f(x, y) = 0.$$

   In dieser Situation nennen wir die Zahl $\mathsf{flip}_{f,x} := \mathrm{Card}(\{y\,;\, f(x, y) \neq f(x, y+1)\})$, also die Anzahl der Wechsel der Werte in der $x$ten Spalte. Wir sagen, daß eine Funktion f *Flipzahl* n hat, falls für alle x, $\mathsf{flip}_{f,x} \leq n$.

   (a) Zeigen Sie, daß eine Menge c.e. ist genau dann wenn sie limesberechenbar ist mit einer Limesfunktion, die Flipzahl 1 hat.

   (b) Zeigen Sie, daß eine Menge d.c.e. ist (siehe Aufgabe 4. auf Übungsblatt 9), genau dann wenn sie limesberechenbar ist mit einer Limesfunktion, die Flipzahl 2 hat.