Lösungshinweise zum Übungsblatt # 7
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Ja, denn sei R der Unterring, $r \in R$, $z \in \mathbb{Z}$, und $f : \mathbb{Z} \to (R, +)$ der eindeutige Gruppenhomomorphismus mit $f(1) = r$. Dann gilt $zr = rz = f(z) \in R$.

2. Folgt unmittelbar aus der Kommutativität und Distributivität.

3. (a) Die Inklusion folgt mit 2. aus $rpq = rp1q$ für $r \in R$.
   (b) Mit 2. und der Kommutativität folgt $\langle p \rangle \cdot \langle q \rangle \subset \langle pq \rangle$.

Zu Aufgabe 33 (4 P) Offensichtlich hat K^n mit komponentenweiser Addition und Multiplikation die Struktur eines Rings mit 1 – der sogenannte Produktring. Wir definieren eine Abbildung $f : T \to K^n$ durch $f(M) = (M_{11}, M_{22}, ..., M_{nn})$. Dies ist ein Ringhomomorphismus, denn $f(I) = 1 \in K^n$ und offensichtlich gilt für $M, N \in T$, dass $f(M + N) = f(M) + f(N)$ und dass $f(MN) = f(M)f(N)$, da $(MN)_{ii} = M_{ii}N_{ii}$ für $i = 1, ..., n$ [1 P].
Zusätzlich ist f surjektiv, also $K^n = \mathrm{im} f$, denn für $k = (k_1, ..., k_n) \in K^n$ gilt $f(\mathrm{diag}(k_1, ..., k_n)) = k$. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden genau den Kern von f, also $T^+ = \ker f$, und damit ein Ideal nach Lemma 5.1.3. Schließlich wenden wir den Homomorphiesatz für Ringe (vgl. Kor. 5.1.7) an, der nun genau die Behauptung beweist [3 P].

Zu Aufgabe 34 (3 P)

1. Der Kern von f ist ein Ideal (vgl. Lemma 5.1.3) in dem Körper K und nicht gleich K, denn $1 \notin \ker f$, da $f(1) = 1 \neq 0$. Demnach muss $\ker f$ das Nullideal und f also injektiv sein [1 P].

2. Eine Wirkung wird durch die Komposition $K \times S \xrightarrow{f \times 1} S \times S \xrightarrow{\cdot} S$ definiert und die drei zu überprüfenden Vektorraumaxiome M1)-M3) (vgl. Def. 2.1.1) folgen mit den Ringaxiomen R2)-R3) (vgl. Def. 1.5.1) und $1s = s$ für $s \in S$, da f die Ringstruktur und 1 erhält [2 P].

Zu Aufgabe 35 (4 P)

1. Folgt direkt mit Aufg. 34 2. und der Komposition $K \to K[X] \to K[X]/\langle p \rangle$ der kanonischen Ringhomomorphismen [1 P].

2. Sei zunächst $n = \deg(p) > 0$. Wir zeigen, dass $[X^0], [X^1], ..., [X^{n-1}]$ eine Basis bildet. Dass diese ein Erzeugendensystem von $K[X]/\langle p\rangle$ bilden, folgt unmittelbar aus dem Satz 4.2.9 über Division mit Rest für Division durch $p \neq 0$. Für ein beliebiges $[f] \in K[X] \to K[X]/\langle p\rangle$ folgt so nämlich $f = qp + r$ für eindeutige q, r in $K[X]$ mit $\deg(r) < n$, insbesondere also $[f] = [r]$ und $r \in \operatorname{span}(X^0, X^1, ..., X^{n-1})$ [1 P]. Die lineare Unabhängigkeit folgt, da alle Polynome $q \neq 0$ in $\langle p\rangle$ Grad größer gleich n haben (vgl. Lemma 4.2.8 3)) und $X^0, X^1, ..., X^{n-1}$ linear unabhängig sind [1 P]. Der Fall $\deg(p) = 0$ folgt unmittelbar mit $\langle p\rangle = K[X]$ oder ähnlichen Argumenten wie oben [1 P].

Zu Aufgabe 36 (4 P)

1. Für $p = qr$ folgt mit $\deg(p) = 1$ und Lemma 4.2.8 3) direkt, dass $\deg(q) = 0$ oder $\deg(r) = 0$, also $q \in K[X]^\times$ oder $r \in K[X]^\times$ [1 P].

2. Beweis von a) und b): Wir nehmen an, dass p nicht irreduzibel ist. D.h. es gibt $q, r \in K[X]$ mit $\deg(q), \deg(r) \geq 1$ und $p = qr$. Es gilt $\deg(p) = \deg(q) + \deg(r)$ (vgl. Lemma 4.2.8 3)), also hat q oder r Grad 1. OBdA sei $\deg(r) = 1$, also $r = a(X - b)$ für $a, b \in K$ und $a \neq 0$. Es folgt $p(b) = q(b)r(b) = 0$, also hat p eine Nullstelle entgegen der Annahme [2 P] (Es gilt sogar gleichbedeutend).

   Gegenbeispiel zu c): Für $K = \mathbb{R}$, liefert das Polynom $(X^2+1)^2$ vom Grad 4, das keine Nullstelle hat, aber offensichtlich nicht irreduzibel ist, ein Gegenbeispiel [1 P.].

Zu Aufgabe 37 (5 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h., in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. Offensichtlich gilt $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume. Damit ist $\overline{(\ )} = 1 \oplus -1$ $\mathbb{R}$-linear und es gilt $\overline{(\ )} \circ \overline{(\ )} = 1$ und $\overline{(\ )}|_{\mathbb{R}} = 1$. Schließlich lässt sich einfach nachprüfen, dass komplexe Konjugation auch die Multiplikation in $\mathbb{C}$ erhält:

   $$\overline{(a+ib)(c+id)} = ac - bd - i(ad+bc) = (a-ib)(c-id) = \overline{(a+ib)}\,\overline{(c+id)}$$

   für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ [1 P].

2. Aus $p(z) = 0$ folgt $0 = \overline{p(z)}$ und $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$, da p reelle Koeffizienten hat und komplexe Konjugation nach 1. ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist [1 P].

3. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra sind die irreduziblen Polynome über $\mathbb{C}$ von Grad 1. Nach 2. können wir den Linearfaktor $(X - z)$ für eine komplexe Nullstelle z von $p \in \mathbb{R}[X]$ mit dem Linearfaktor $(X - \overline{z})$ zu einem

irreduziblen Polynom $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$ zweiten Grades in $\mathbb{R}[X]$ zusammenfassen (vgl. Aufg. 36 2.a)). Ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ zerfällt also in ein Produkt irreduzibler Polynome von Grad 1 und 2 (vgl. auch Aufg 36 1.) [2 P].

4. Das Polynom $p = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ mit $a \neq 0$ ist genau dann irreduzibel, wenn $b^2 - 4ac < 0$ (vgl. Aufg. 36 2.a)) [1 P].