Übungsblatt # 09 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)

1. Geben Sie ein Beispiel für einem kommutativen Ring A und ein Polynom $f(x) \in A[x]$ an, in dem f mehr Nullstellen als $grad(f)$ hat.
2. Geben Sie ein Beispiel für einem kommutativen Ring A an, in dem $(A[x])^\times \neq A^\times$ gilt.

Aufgabe 2 (4 P)

1. Sei K ein Körper, und sei $f \in K[X]$ ein Polynom mit $grad(f) \in \{2, 3\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann zerlegbar ist, wenn f eine Nullstelle hat.
2. Ist die Behauptung aus Teil 1 auch für f mit $grad(f) = 4$ richtig? Was passiert, wenn K nur ein Integritätsbereich ist?

Aufgabe 3 (6 P)
Zeigen Sie:

1. Das Polynom $x^3 - 5x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist unzerlegbar.

Sei $p > 2$ eine Primzahl.

2. Das Polynom $\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} x^n \in \mathbb{Q}[x]$ ist unzerlegbar.
   Hinweis: Machen Sie aus dem Polynom zunächst ein Element in $\mathbb{Z}[x]$.
3. Das Polynom $f_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^{p-1} \in \mathbb{Q}[x]$ ist unzerlegbar.
4. Das Polynom $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $p = 3 \bmod 4$ gilt.

Aufgabe 4 (4 P)
Ein Integritätsbereich A heisst *Euklidischer Ring*, falls es eine Funktion (eine *Norm*) $N : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass:
A. Division mit Rest: $\forall x, y \in A, y \neq 0, \exists q, r \in A$ mit $x = qy + r$, wobei entweder $r = 0$ oder $N(r) < N(y)$ ist, und
B. $\forall x, y \in A\backslash\{0\}$ gilt $N(xy) \geq N(x)$.

1. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}$ und $K[X]$ (wobei K ein Körper ist) sind Euklidischer Ringe.
2. Zeigen Sie: ein Euklidischer Ring ist ein Hauptidealring.

Bitte wenden.

Aufgabe 5 (6 P)

Sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$. R ist ein Unterring von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

1. $\forall z \in \mathbb{C}\, \exists a + ib \in R : |z - (a + ib)|^2 \leq \frac{1}{2}$.
2. R ist ein Euklidischer Ring mit $N(a + ib) = a^2 + b^2$.
3. Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn $N(r) = 1$ gilt. Beschreiben Sie alle die invertierbare Elemente in R.
4. Zeigen Sie dass $2 \in R$ kein Primelement ist.

Ab hier beginnt der Spaß-Teil der Aufgabe. D.h. die Bearbeitung der Teilaufgaben 5–7 ist freiwillig und gibt 0P. Zeigen Sie:

5. Wenn $p = 4n + 3$ eine Primzahl ist, dann ist $p \in R$ ein Primelement.
6. Wenn $p = 4n + 1$ eine Primzahl ist, dann ist $p \in R$ kein Primelement.
7. Wenn $p = 4n + 1$ eine Primzahl ist, dann existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass $p = a^2 + b^2$ gilt.