DAS ABELSCHE THEOREM BEI ELLIPTISCHEN KURVEN

CLAUDIO MENESES

ZUSAMMENFASSUNG. Das Ziel dieses Übungsblattes ist es, die Einzelheiten des Abelschen Theorems im Spezialfall der Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 herauszuarbeiten. Die Gesamtidee besteht darin, die abstrakte Theorie, die wir entwickelt haben, mit zwei klassischen Begriffen zu überbrücken, nämlich der Theorie der *elliptischen Kurven* (d. h. ebenen kubischen Kurven) und der doppelten periodischen Funktionen auf der komplexen Ebene. Insbesondere werden wir beschreiben, wie diese Resultate als eine Form der algebraischen Uniformisierung verstanden werden können.

1. Elliptische Kurven

Wir definieren die Riemannsche Fläche der 1-dimensionalen Familie algebraischer Funktionen

$$F(z,\lambda) = \sqrt{z(z-1)(z-\lambda)},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ ansonsten beliebig ist, durch die 1-dimensionale Familie *elliptischer Kurven*

$$X_\lambda := \{[Z_0 : Z_1 : Z_2] \in \mathbb{CP}^2 \ : \ Z_0 Z_2^2 = Z_1(Z_1 - Z_0)(Z_1 - \lambda Z_0))\}$$

Die Einschränkung der Werte von λ wird vorgenommen, um zu gewährleisten, dass X_λ als 2-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit immer glatt ist. Die Struktur der Riemannschen Fläche von X_λ wird dann durch die Einbettung in $\mathbb{CP}^2$ induziert.

Übung 1. (a) Zeigen Sie, dass das Geschlecht von X_λ für jeden Wert $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ gleich 1 ist. *Hinweis.* Überprüfen Sie, ob die Beschränkung auf X_λ der meromorphen Funktion

$$[Z_0 : Z_1 : Z_2] \mapsto Z_1/Z_0$$

definiert eine 2-blättrige verzweigte Überlagerung $f_\lambda : X_\lambda \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $\lambda, 0, 1$ und ∞ als Verzweigungspunkte.[a] Betrachten Sie die Triangulierung von X_λ, die durch die tetraedrische Triangulierung von $\hat{\mathbb{C}}$ mit diesen Verzweigungspunkte als Ecken induziert wird. (b) Zeigen Sie außerdem, dass

$$\omega_\lambda = f_\lambda^* \left(\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} \right)$$

ein expliziter Erzeuger für $\Omega\,(X_\lambda)$ ist.

[a] Da $X_\lambda \cap H = \{[0:0:1]\}$, wobei $H := \{Z_0 = 0\}$ die Ferngerade auf $\mathbb{CP}^2$ ist, ist der Wert $f_\lambda([0:0:1]) = \infty$ für alle λ wohldefiniert. Wir bezeichnen den speziellen Punkt $[0:0:1] \in X_\lambda$ mit x_0.

2. Doppelverhältnis

Sei

$$\mathrm{Conf}_4\left(\hat{\mathbb{C}}\right) = \left\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \ : \ z_i \neq z_j \ \forall i, j\right\}$$

der Konfigurationsraum von geordneten Quadrupeln auf der Riemannschen Zahlenkugel. Es gibt eine natürliche $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-Wirkung auf $\mathrm{Conf}_4(\hat{\mathbb{C}})$. Jede $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-invariante Projektion

$$\mathrm{Conf}_4\left(\hat{\mathbb{C}}\right) \mapsto \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0, 1, \infty\}$$

wird *Doppelverhältnis* genannt. Ein Beispiel für ein Doppelverhältnis ist gegeben durch

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_4)}$$

was dem speziellen Wert $T(z_1)$ der Möbiustransformationen

$$T(z) = \frac{(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_2)} \frac{(z - z_2)}{(z - z_4)}$$

in Abhängigkeit von z_1, z_2, z_3 entspricht, die durch die Werte

$$T(z_2) = 0, \quad T(z_3) = 1, \quad T(z_4) = \infty$$

eindeutig charakterisiert sind.

Die symmetrische Gruppe S_4 wirkt durch Indexpermutation auf $(z_1, z_2; z_3, z_4)$, wobei die Isotropiegruppe isomorph zur Kleinschen Viergruppe ist, und erzeugt alle sechs möglichen Doppelverhältnisse.

Übung 2. (a) Zeigen Sie, dass alle sechs möglichen Doppelverhältnisse eines Quadrupels $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathrm{Conf}_4(\hat{\mathbb{C}})$ den Bahnen von $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ in $\hat{\mathbb{C}}$ unter der Untergruppe $\mathfrak{S}_3 \cong \mathrm{S}_3$ von $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ entsprechen, deren Elemente

$$\lambda \mapsto \lambda, \quad \lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \mapsto 1 - \lambda, \quad \lambda \mapsto \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \lambda \mapsto \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \lambda \mapsto \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

sind. *Hinweis.* Tatsächlich können alle sechs möglichen Doppelverhältnisse als die Werte

$$(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}; z_{\sigma(3)}, z_4), \quad \sigma \in \mathrm{S}_3$$

unter der effektiven Wirkung der Untergruppe $\mathrm{S}_3 < \mathrm{S}_4$ erhalten werden. (b) Zeigen Sie, dass

$$J(\lambda) = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2}$$

eine $\mathfrak{S}_3$-invariante rationale Funktion ist. (c) Zeigen Sie, dass zwei elliptische Kurven X_λ und $X_{\lambda'}$ genau dann isomorph sind, wenn λ und λ' zur gleichen $\mathfrak{S}_3$-Bahn gehören. *Hinweis.* Das Doppelverhältnis ist die einzige projektive Invariante eines Quadrupels von Punkten in einer projektiven Geraden.

3. Projektive Einbettungen

Unser nächstes Ziel ist es, eine Umkehrung zu den Konstruktionen in Übung 1 herzustellen. Wir werden nämlich beweisen, dass jede abstrakte kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 biholomorph zu einer glatten elliptischen Kurve ist. Auf diese Weise werden wir in der Lage sein zu verstehen, wie das Abelsche Theorem ursprünglich im frühen 19. Jahrhundert entdeckt wurde.

Eine Alternative zum Studium allgemeiner kompakter Riemannschen Flächen besteht darin, den äquivalenten Begriff von glatten projektiven Kurven zu betrachten. Es kann gezeigt werden, dass, wenn eine kompakte Riemannsche Fläche X nicht hyperelliptisch ist, ein projektives Modell durch die sogenannte *kanonische Einbettung*

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}\left(H^0(X,\Omega)\right) \cong \mathbb{CP}^{g-1}$$

definiert ist. In einem solchen Fall ist es eine notwendige Bedingung, dass $g \geq 3$, da alle Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 und 2 hyperelliptisch sind. Andererseits lässt jede hyperelliptische Riemannsche Fläche ein ebenes Kurvenmodell zu. Wir werden dieses allgemeine Modell explizit im einfachsten Fall vom Geschlecht 1 beschreiben.

Sei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1. Folgendermaßen wird ω ein Erzeuger von $H^0(X,\Omega)$ bezeichnen. Da $\deg(\omega) = 0$, folgt $(\omega) \equiv 0$ notwendigerweise. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Der Serresche Dualitätssatz zusammen mit dem Verschwinden von $H^0\left(X,\mathcal{O}_D\right)$ wenn $\deg D < 0$ impliziert, dass

$$\dim H^1(X,\mathcal{O}_{nx_0}) = 0, \quad n \geq 1.$$

Genauso impliziert der Satz von Riemann–Roch in diesem Fall, dass

$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_{nx_0}) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ n & n \geq 1. \end{cases}$$

Da für alle $n \geq 0$

$$H^0\left(X,\mathcal{O}_{nx_0}\right) \subset H^0\left(X,\mathcal{O}_{(n+1)x_0}\right)$$

folgt dann

$$H^0\left(X,\mathcal{O}_{x_0}\right) = H^0\left(X,\mathcal{O}\right)$$

was wir bereits wussten, da eine nicht konstante meromorphe Funktion mit einem einzigen Pol der Ordnung 1 den Isomorphismus $X \cong \mathbb{CP}^1$ bestimmen würde, was einen Widerspruch wäre. Andernfalls, gilt für jedes $n \geq 2$ dass

$$H^0\left(X,\mathcal{O}_{(n+1)x_0}\right) \setminus H^0\left(X,\mathcal{O}_{nx_0}\right) \neq \emptyset.$$

Wir betrachten eine willkürliche Wahl

$$f_n \in H^0\left(X,\mathcal{O}_{nx_0}\right) \setminus H^0\left(X,\mathcal{O}_{(n-1)x_0}\right), \quad n \geq 2.$$

Insbesondere ist $\{1, f_2, f_3\}$ eine Basis in $H^0\left(X,\mathcal{O}_{3x_0}\right)$. Wir werden zeigen, dass die induzierte Abbildung

$$\iota : X \to \mathbb{P}\left(H^0\left(X,\mathcal{O}_{3x_0}\right)\right) \cong \mathbb{CP}^2$$

$$x \mapsto [1 : f_2(x) : f_3(x)]$$

eine glatte projektive Einbettung ist, deren Bild eine kubische ebene Kurve ist. Beachten Sie, dass $\iota(x_0) = [0 : 0 : 1]$, wodurch die Notation konsistent wird.

Übung 3. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, f_2, f_3, f_2^3, f_3^2\}$ immer linear abhängig in $H^0(X, \mathcal{O}_{6x_0})$ sind, und außerdem, dass f_3 so gewählt werden kann, dass

$$\{1, f_2, f_2^3, f_3^2\}$$

linear abhängig in $H^0(X, \mathcal{O}_{6x_0})$ sind. Es besteht also eine lineare Relation

$$f_3^2 = af_2^3 + bf_2 + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

und bis auf eine affine Abbildung

$$f_2 \mapsto a' f_2 + b', \qquad a', b' \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

in $H^0(X, \mathcal{O}_{2x_0}) \backslash H^0(X, \mathcal{O})$ können wir die letzte Gleichung in folgender Form ausdrücken

$$f_3^2 = f_3(f_3 - 1)(f_3 - \lambda)$$

wobei λ konstant ist. Begründen Sie, dass tatsächlich $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$.

Bemerkung 1. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(1)$ des zugehörigen Geradenbündles $[H]$ auf $\mathbb{CP}^2$ wird *Serres Twistinggarbe* genannt. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{O}_{3x_0} = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(1)$.

4. Perioden von elliptischen Integralen

Sei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1. Eine geordnete Basis $\{\alpha, \beta\}$ von $H_1(X, \mathbb{Z})$ heißt *symplektisch*, wenn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Matrix ihrer Schnittform $\mu : H_1(X, \mathbb{Z}) \times H_1(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ ist. Aus der allgemeinen Klassifikation der kompakten orientierbaren Flächen folgt, dass immer symplektische Basen existieren.

Übung 4. (a) Zeigen Sie, dass für jede symplektische Basis das Verhältnis τ ihrer Perioden die Nebenbedingung

$$\tau := \int_\beta \omega \Big/ \int_\alpha \omega \in \mathbb{H}$$

erfüllt. Zeigen Sie außerdem, dass Änderungen der symplektischen Basis der folgenden Gruppenwirkung

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

von $\Gamma := \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ auf τ entsprechen. (b) Begründen Sie, warum jedes $\tau \in \mathbb{H}$ das Verhältnis der Perioden einer Riemannsche Fläche X ist.

Auf diese Weise haben wir zwei grundlegende Invarianten elliptischer Kurven festgestellt, nämlich die Γ-Bahnen ihrer normalisierten Perioden und die $\mathfrak{S}_3$-Bahnen des Doppelverhältnisses ihrer Verzweigungspunkte. Die Beziehung zwischen diesen Invarianten ist ein schönes klassisches Ergebnis in der Theorie der Modulformen, das wir als nächstes berühren werden.

5. Weierstrasssche $\wp$-Funktion

Sei $\tau \in \mathbb{H}$ konstant. Wir definieren die Weierstraßsche $\wp$-Funktion als die folgende unendliche Reihe

$$\wp(z;\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z-m\tau-n)^2} - \frac{1}{(m\tau+n)^2} \right)$$

die im Komplement des Gitters

$$\Lambda := \mathbb{Z}\{1,\tau\}$$

absolut konvergent und auf kompakten Mengen gleichmäßig kovergent ist. Die Weierstraße $\wp$-Funktion ist so konstruiert, dass sie bzgl. Λ doppeltperiodisch ist und einen Pol der Ordnung 2 an jeder Stelle $m\tau + n \in \Lambda$ hat.

Ähnlich ist für alle konstanten Werten $k \geq 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ die absolut konvergente Reihe der Form

$$G_k(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}$$

als *Eisensteinreihe vom Gewicht* k zum Gitter Λ gennant. Natürlich können $\wp$ und G_k auch als holomorphe Funktionen der Veränderlichen τ betrachtet werden.

Übung 5. (a) Zeigen Sie, dass für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ die Weierstraßsche $\wp$-Funktion die folgende nichtlineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erfüllt

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

wobei $g_2 = 60G_2(\tau)$ und $g_3 = 140G_3(\tau)$. *Hinweis.* Verwenden Sie die Identität

$$\wp(z;\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)G_k(\tau)z^{2k-2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung in der Form

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

faktorisiert werden kann, wobei

$$e_1 = \wp\left(\frac{1}{2};\tau\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\tau}{2};\tau\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{1+\tau}{2};\tau\right).$$

(c) Zeigen Sie, dass die zugehörige Funktion der komplexen Veränderlichen τ

$$\lambda(\tau) := \frac{e_1 - e_2}{e_3 - e_2},$$

unter der Wirkung der normalen Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma(2) := \ker\{p_2 : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}_2)\} \lhd \Gamma$$

invariant ist und dass außerdem die Γ-Bahn von τ auf die $\mathfrak{S}_3$-Bahn von $\lambda(\tau)$ abgebildet wird. Beachten Sie, dass $\Gamma/\Gamma(2) \cong \mathrm{S}_3$. *Hinweis.* Beweisen Sie, dass $\wp$ als Funktion von τ Γ-invariant ist, und bestimmen Sie die Änderung von λ unter Permutation der Wurzeln e_1, e_2, e_3.

6. Modulformen

Die Eisensteinreihe G_k ist eine Modulform vom Gewicht $2k$ zur Modulgruppe Γ, d. h. für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$ gilt

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} G_k(\tau).$$

Daraus folgt, das die *modular Diskriminante* von $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$

$$\Delta := g_2^3 - 27g_3^2,$$

gedacht als eine holomorphe Funktion des Veränderlichens τ, eine Modulform vom Gewicht 12 ist. Ebenso kann verifiziert werden, dass die *Dedekinsche Etafunktion*

$$\eta(\tau) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

wobei $q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, eine Modulform vom Gewicht 1/2 ist.

Übung 6. Beweisen Sie die folgende Identitäten der Modulformen

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \eta^{24}(\tau),$$

$$\lambda(\tau) = \frac{16\eta^8(\tau/2)\eta^{16}(2\tau)}{\eta^{24}(\tau)}.$$

Bemerkung 2. Die Modulare λ-Funktion ist das *Hauptmodul* der Gruppe $\Gamma(2)$ in dem Sinne, dass sie den Isomorphismus

$$\mathbb{CP}^1 \backslash \{0, 1, \infty\} \cong \mathbb{H}/\Gamma(2)$$

bestimmt, d. h. $\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist eine hyperbolische Uniformisierungsabbildung von $\mathbb{CP}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$.

Bemerkung 3. Insgesamt haben wir auch bewiesen, das $\mathbb{H}$ dem Teichmüller-Raum in Geschlecht 1 entspricht, wobei Γ die Rolle seiner Abbildungsklassengruppe spielt.

7. Die klassiche Abel-Jacobi-Theorie

Wir werden nun einige der Resultaten zusammenstellen, die wir in den vorherigen Übungen gesammelt haben. Zunächst folgt aus Übung 5, dass die holomorphe Abbildung[1]

$$\phi_\tau : \mathbb{C} \to X_{\lambda(\tau)}, \qquad z \mapsto [1 : \wp(z;\tau) : \wp'(z;\tau)]$$

für jeden festen Wert des Parameters $\tau \in \mathbb{H}$ eine Uniformisierungsabbildung ist, in dem Sinne, dass sie den folgenden Biholomorphismus kompakter Riemannschen Flächen

$$X_{\lambda(\tau)} \cong \mathbb{C}/\Lambda$$

gilt, und außerdem, dass

$$\phi_\tau^*\left(\omega_{\lambda(\tau)}\right) = dz,$$

[1]Bemerken Sie, dass $\phi_\tau(\Lambda) = x_0 := [0 : 0 : 1]$ aus den Singularitäten von $\wp$ und $\wp'$.

wie aus den Übungen 1 und 4 folgt. In der klassischen Terminologie sagen wir, dass die Abbildung ϕ_τ das *„mehrwertige“* elliptische Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

umkehrt, wobei $x_0 = [0:0:1] \in X_\lambda$.

Bemerkung 4. Es ist üblich, die grundlegenden trigonometrischen Funktionen durch Umkehrung von Stammfunktionen algebraischer Funktionen zu definieren, z. B.

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

was als Abelsches Integral auf der Riemannschen Fläche einer Projektiven Quadrik interpretiert wird. Auf diese Weise sind elliptische Funktionen (und die vollständige Klasse der Abelsche Integrale) eine natürliche Verallgemeinerung der sogenannten *Kreisfunktionen* (d. h. trigonometrischen Funktionen). Da glatte Quadriken in $\mathbb{CP}^2$ im Gegenzatz zu den elliptischen Kurven biholomorph zu $\mathbb{CP}^1$ und insbesondere einfach zusammenhängend sind, lassen die Perioden trigonometrischer Funktionen keine analoge topologische Interpretation zu.

Der Zweck der nächsten beiden Übungen ist es, zu veranschaulichen, wie die vorherigen Tatsachen zuerst entdeckt wurden.

8. Additionssatz und die Gruppenstruktur auf elliptischen Kurven

Übung 7. (a) Zeigen Sie, dass jede elliptische Kurve eine Lie-Gruppenstruktur mit neutralem Element x_0 zulässt. *Hinweis:* Der *Satz von Bézout* impliziert dass eine ebene Kubic eine beliebige Gerade in genau drei (möglicherweise vielfachen) Punkten schneidet. (b) Verifizieren Sie die *Additionssatz für die* $\wp$*-Funktion*

$$\wp(z_1+z_2;\tau) = -\wp(z_1;\tau) - \wp(z_2;\tau) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1;\tau)-\wp'(z_2;\tau)}{\wp(z_1;\tau)-\wp(z_2;\tau)}\right)^2$$

direkt aus der Definition von $\wp(z;\tau)$ und der Eindeutigkeitscharakterisierung doppeltperiodischer Funktionen. *Hinweis.* Zeigen Sie zuerst, dass

$$\zeta(z_1+z_2;\tau) = \zeta(z_1;\tau) + \zeta(z_2;\tau) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(z_1;\tau)-\wp'(z_2;\tau)}{\wp(z_1;\tau)-\wp(z_2;\tau)}$$

wobei $\zeta(z;\tau) = 1/z - \sum_{k=2}^{\infty} G_k z^{2k-1}$ die Stammfunktion von $\wp$ ist. Leiten Sie diesen Ausdruck ab und wenden Sie die Identität $\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$ an. (c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(z_1;\tau) & \wp'(z_1;\tau) \\ 1 & \wp(z_2;\tau) & \wp'(z_2;\tau) \\ 1 & \wp(z_3;\tau) & \wp'(z_3;\tau) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1+z_2+z_3 \in \Lambda$$

d. h. die Summe dreier komplexer Zahlen z_1, z_2, z_3 gehört genau dann zum Periodengitter, wenn ihre Bilder $\phi_\tau(z_1), \phi_\tau(z_2), \phi_\tau(z_3)$ in einer projektiven Geraden enthalten sind. (d) Schließen Sie, dass die Abbildung ϕ_τ auch ein Homomorphismus komplexer Lie-Gruppen ist.

9. Das Abelsche Theorem und elliptische Integrale

Sei $\left(\mathbb{CP}^2\right)^\vee$ die duale projektive Ebene, d. h. der Raum der Geraden auf $\mathbb{CP}^2$. Für jeden festen Wert $\tau \in \mathbb{H}$ sei

$$\Psi_\tau : \left(\mathbb{CP}^2\right)^\vee \to \mathrm{Div}^0\left(X_{\lambda(\tau)}\right)$$

die algebraische Abbildung definiert als

$$\Psi_\tau(L) = L \cdot X_{\lambda(\tau)} - 3x_0 = x_1 + x_2 + x_3 - 3x_0,$$

wobei $\cdot$ die Schnittpunkte als Divisor in $X_{\lambda(\tau)}$ bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\Psi_\tau(H) = 0.$$

Die nächste Übung führt das ursprüngliche Resultat ein, das Abel 1827 bewiesen hat.

Übung 8. (a) Zeigen Sie, dass $\Psi_\tau(L) = (f)$ für ein $f \in \mathscr{M}\left(X_{\lambda(\tau)}\right)$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{x_0}^{x_i} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} \equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

Hinweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $L \neq H$. Dann können wir L in der Form $ax+by+c=0$ parametrisieren, wobei x und y die affine Koordinaten

$$\mathbb{CP}^2 \backslash H \cong \mathbb{C}^2, \qquad [Z_0 : Z_1 : Z_2] \mapsto (Z_1/Z_0, Z_2/Z_0) = (x, y)$$

sind. Verbenden Sie die Weierstraßsche $\wp$-Funktion, um die erwartete meromorphe Funktion auf $X_{\lambda(\tau)}$ als doppeltperiodische Funktion auf $\mathbb{C}$ zu konstruieren.
(b) Begründen Sie, wie die allgemeine Formulierung des Abelschen Theorems den vorherigen Spezialfall impliziert und insbesondere warum jeder Hauptdivisor auf $X_{\lambda(\tau)}$ linear äquivalent zu einem Divisor der form $x_1 + x_2 + x_3 - 3x_0$ für eine Gerade $L \subset \mathbb{CP}^2$ ist.

Bemerkung 5. Das bisherige Resultat ist eine Verallgemeinerung der Additionssatz für trigonometrische Funktionen, nämlich, die Standardidentität

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1)$$

kann bezgl. der Substitutionen

$$x_1 = \sin(z_1), \quad x_2 = \sin(z_2) \quad x_3 = \sin(z_1 + z_2) = x_1\sqrt{1 - x_2^2} + x_2\sqrt{1 - x_1^2}$$

als Identität der Perioden algebraischer Funktionen

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

neu ausgedrückt werden.

10. Jacobische Thetafunktionen

Für jeden festen Wert $\tau \in \mathbb{H}$ ist die ganze *Jacobische Thetafunktion* als folgende absolut konvergent und auf kompakten Mengen gleichmäßig kovergent Reihe definiert:

$$\vartheta(z;\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi\sqrt{-1}n^2\tau+2\pi\sqrt{-1}nz}$$

Übung 9. (a) Beweisen Sie die Quasi-periodizitätsbeziehungen der Jacobische Thetafunktion

$$\vartheta(z+1;\tau) = \vartheta(z;\tau), \qquad \vartheta(z+\tau;\tau) = e^{-\pi\sqrt{-1}(\tau+2z)}\vartheta(z;\tau),$$

(b) Zeigen Sie, dass die Nullstelle der Jacobischen Thetafunktion gleich

$$\{\, m + 1/2 + (n+1/2)\tau : \; m, n \in \mathbb{Z}\}$$

ist.

Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts Universität zu Kiel, Heinrich-Hecht-Platz 6, 24118 Kiel, Germany
E-mail address: meneses@math.uni-kiel.de