Übungen zur Vorlesung Analytische Zahlentheorie

H. Klein — Blatt 9,13. Januar 2020

(33) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion.

(a) Ist $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend so gilt $\sigma(f \cdot g) \leq \sigma(f)$.

(b) Ist $g := f \cdot (\log|\mathbb{N})$ so gelten $\sigma(f) = \sigma(g)$ und $D'_f = -D_g$.

(34) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zwei zahlentheoretische Funktionen.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ und nehme an, dass $D_f(z)$ konvergiert und $D_g(z)$ sogar absolut konvergiert. Zeigen Sie, dass $D_{f*g}(z)$ dann ebenfalls konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma(f * g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma_0(g)\}$ gilt.

(35) Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, $\sigma \in \mathbb{R}$ und für jede Primzahl p sei $g_p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $g_p(0) = 1$. Nehme an, dass für jedes $z \in H_\sigma$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z} = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_p(n)}{p^{nz}} \right)$$

gilt wobei alle hierbei auftretenden Reihen und Produkte als konvergent angenommen werden. Zeigen Sie, dass f dann multiplikativ ist.

(36) Sei

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto \frac{(-1)^n}{\log^2(2n)}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist $\sigma(f) = 0$ und $D_f(it)$ konvergiert für jedes $t \in \mathbb{R}$.

(b) Die Faltung $h := f * f$ ist unbeschränkt und hat ebenfalls die Konvergenzabsizze $\sigma(h) = 0$.

(c) Die Reihe $D_h(it)$ divergiert für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Dienstag, den 20. Januar bis $16^{\underline{15}}$ in meinem Postfach.