

Numerik I, Übung 11

Sommersemester 2015

Aufgabe 41, 6 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -e^x + z \sin(x + y) + z^2 y &= \pi - 1 \\ x^2 y + zx + z^2 y^2 &= \pi^2 \\ xyz + \sin(xyz) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses soll mit Hilfe des Newtonverfahrens gelöst werden.

- Man gebe die Jacobi-Matrix der Verfahrensvorschrift an.
- Man programmiere das Newton-Verfahren zum Startwert $X_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0.4, 2, 1)$. Man iteriere solange, bis $\|X_k - X_{k-1}\|_2 \leq 10^{-12}$. Man bestimme jeweils die zugehörige numerische Konvergenzordnung. Ausgabe: x_k, y_k, z_k, p_k .

Aufgabe 42, 7 Punkte

Wenn $f(x)$ bei ξ eine doppelte Nullstelle hat, dann hat $\sqrt{f(x)}$ dort eine einfache Nullstelle.

- Man gebe das Newton-Verfahren für $\sqrt{f(x)}$ an.
- Zur Berechnung der Nullstelle $\xi = 0$ der Funktion $f(x) = x^2(x + 1)$ gebe man die Verfahrensvorschriften für das Newton-Verfahren und für das gemäß (a) modifizierte Newtonverfahren an.
- Man programmiere beide Verfahren mit Startwert $x_0 = 1$ und gebe die Anzahl der Iterationsschritte an, die benötigt werden, um die Genauigkeit $|f(x_k)| \leq 10^{-12}$ zu erzielen. Man bestimme für beide Verfahren die numerische Konvergenzordnung.

Zusatz, 3 Punkte

Man wende das Newton-Verfahren auf das Polynom $f(z) = z^3 - 1$ über den komplexen Zahlen an. Man stelle graphisch dar, zu welcher der drei Nullstellen das Verfahren abhängig vom Startwert konvergiert. Man wähle die Bereiche $[-25, 25] \times [-25i, 25i]$, $[-1, 1] \times [-i, i]$ und $[-0.1, 0.1] \times [-0.1i, 0.1i]$.

Aufgabe 43, 6 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$y(t) = 2e^{-t/2} \cos(\pi t).$$

Diese kann z.B. die Auslenkung $y(t)$ einer Feder bei einer gedämpften Schwingung zum Zeitpunkt t beschreiben.

- Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 2 im Intervall $[0, 2]$ zu den Stützstellen $(t_0, t_1, t_2) = (0, 1, 2)$. Geben Sie das Polynom sowohl in Lagrange- als auch in Monom-Darstellung an.
- Skizzieren Sie $y(t)$ zusammen mit dem Interpolationspolynom.
- Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 9 im Intervall $[0.5, 9.5]$ für eine äquidistante Zerlegung des Intervalls, d.h. $t_0 = 0.5, t_9 = 9.5$ und $t_{j+1} - t_j = \text{const}$.
- Skizzieren Sie $y(t)$ zusammen mit dem Interpolationspolynom im Intervall $[0, 10]$. Erklären Sie das Ergebnis.

Aufgabe 44, 4 Punkte

Man zeige mit Hilfe differentieller Fehleranalyse, dass der auf der Darstellung

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

beruhende Algorithmus zur Berechnung von $f(x)$ für $x \neq 0$ mit hinreichend kleinem Betrag instabil ist.

Die Abgabe schriftlicher Aufgaben erfolgt am Donnerstag, d. 25.06.2015, zu Beginn der Vorlesung.

Quellcodes von Programmieraufgaben senden Sie bitte bis 25.06.2015, 13.15 Uhr, an num.uni.leipzig@gmail.com. Als Programmiersprache können verwendet werden: C, C++, Java, Fortran. Ausgaben der Programme bitte an die schriftlichen Aufgaben heften.

Die Abgabe erfolgt in Gruppen von 3-4 Personen. Bitte sowohl bei schriftlichen als auch bei den Programmieraufgaben **deutlich** kennzeichnen, wer an der Abgabe beteiligt ist.