

## Numerik I, Übung 11

Sommersemester 2015

### Aufgabe 41, 6 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -e^x + z \sin(x + y) + z^2 y &= \pi - 1 \\ x^2 y + zx + z^2 y^2 &= \pi^2 \\ xyz + \sin(xyz) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses soll mit Hilfe des Newtonverfahrens gelöst werden.

- Man gebe die Jacobi-Matrix der Verfahrensvorschrift an.
- Man programmiere das Newton-Verfahren zum Startwert  $X_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0.4, 2, 1)$ . Man iteriere solange, bis  $\|X_k - X_{k-1}\|_2 \leq 10^{-12}$ . Man bestimme jeweils die zugehörige numerische Konvergenzordnung. Ausgabe:  $x_k, y_k, z_k, p_k$ .

### Aufgabe 42, 7 Punkte

Wenn  $f(x)$  bei  $\xi$  eine doppelte Nullstelle hat, dann hat  $\sqrt{f(x)}$  dort eine einfache Nullstelle.

- Man gebe das Newton-Verfahren für  $\sqrt{f(x)}$  an.
- Zur Berechnung der Nullstelle  $\xi = 0$  der Funktion  $f(x) = x^2(x + 1)$  gebe man die Verfahrensvorschriften für das Newton-Verfahren und für das gemäß (a) modifizierte Newtonverfahren an.
- Man programmiere beide Verfahren mit Startwert  $x_0 = 1$  und gebe die Anzahl der Iterationsschritte an, die benötigt werden, um die Genauigkeit  $|f(x_k)| \leq 10^{-12}$  zu erzielen. Man bestimme für beide Verfahren die numerische Konvergenzordnung.

### Zusatz, 3 Punkte

Man wende das Newton-Verfahren auf das Polynom  $f(z) = z^3 - 1$  über den komplexen Zahlen an. Man stelle graphisch dar, zu welcher der drei Nullstellen das Verfahren abhängig vom Startwert konvergiert. Man wähle die Bereiche  $[-25, 25] \times [-25i, 25i]$ ,  $[-1, 1] \times [-i, i]$  und  $[-0.1, 0.1] \times [-0.1i, 0.1i]$ .

### Aufgabe 43, 6 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$y(t) = 2e^{-t/2} \cos(\pi t).$$

Diese kann z.B. die Auslenkung  $y(t)$  einer Feder bei einer gedämpften Schwingung zum Zeitpunkt  $t$  beschreiben.

- Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 2 im Intervall  $[0, 2]$  zu den Stützstellen  $(t_0, t_1, t_2) = (0, 1, 2)$ . Geben Sie das Polynom sowohl in Lagrange- als auch in Monom-Darstellung an.
- Skizzieren Sie  $y(t)$  zusammen mit dem Interpolationspolynom.
- Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 9 im Intervall  $[0.5, 9.5]$  für eine äquidistante Zerlegung des Intervalls, d.h.  $t_0 = 0.5, t_9 = 9.5$  und  $t_{j+1} - t_j = \text{const}$ .
- Skizzieren Sie  $y(t)$  zusammen mit dem Interpolationspolynom im Intervall  $[0, 10]$ . Erklären Sie das Ergebnis.

#### Aufgabe 44, 4 Punkte

Man zeige mit Hilfe differentieller Fehleranalyse, dass der auf der Darstellung

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

beruhende Algorithmus zur Berechnung von  $f(x)$  für  $x \neq 0$  mit hinreichend kleinem Betrag instabil ist.

Die Abgabe schriftlicher Aufgaben erfolgt am Donnerstag, d. 25.06.2015, zu Beginn der Vorlesung.

Quellcodes von Programmieraufgaben senden Sie bitte bis 25.06.2015, 13.15 Uhr, an [num.uni.leipzig@gmail.com](mailto:num.uni.leipzig@gmail.com). Als Programmiersprache können verwendet werden: C, C++, Java, Fortran. Ausgaben der Programme bitte an die schriftlichen Aufgaben heften.

Die Abgabe erfolgt in Gruppen von 3-4 Personen. Bitte sowohl bei schriftlichen als auch bei den Programmieraufgaben **deutlich** kennzeichnen, wer an der Abgabe beteiligt ist.