Sommersemester 2016 | Prof. Dr. T. Finis
Fakultät für Mathematik und Informatik | Dr. J. Matz
Universität Leipzig

Lineare Algebra II
Übungszettel 1

4. April 2015

Abgabe[1] am 11. April bis 11 Uhr in den Briefkästen[2] im Postraum (A514) oder am Anfang der Globalübung.

Aufgabe 1 (1+3 Punkte)**.** Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Man zeige:

(i) A und B kommutieren miteinander.

(ii) A und B sind simultan (d.h. bezüglich derselben Basis) diagonalisierbar, haben aber unterschiedliche Eigenwerte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und man definiere $a_k = \mathrm{Tr}(A^k)$, die Spur von A^k, für $k = 1, 2, 3$. Man zeige, dass das charakteristische Polynom $\chi(T) \in \mathbb{C}[T]$ von A gegeben ist durch

$$\chi(T) = T^3 - a_1 T^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2)T - \frac{1}{6}(a_1^3 + 2a_3 - 3a_1 a_2).$$

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.** Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\phi : V \longrightarrow V$ ein Vektorraumhomorphismus.

(i) Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ und $p(T) \in K[T]$ ein Polynom. Man zeige, dass dann $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(\phi) : V \longrightarrow V$ ist.

(ii) Es seien $v, w \in V$ zwei Eigenvektoren von ϕ. Man finde notwendige und hinreichende Kriterien dafür, dass $v - w$ ebenfalls ein Eigenvektor von ϕ ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Man zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$$

diagonalisierbar ist, und man berechne A^{24}.

---

[1] Beschriften Sie Ihre Abgaben immer mit Ihrem Name und Ihrer Übungsgruppe.

[2] Beachten Sie bitte die Zuordnung der Briefkästen zu den jeweiligen Übungsgruppen!