Prof. Dr. Stephan Luckhaus SS 2018

Übungen zur Analysis II

Serie 7

Vorbemerkung: Für diese Gesamtbewertung der Serien wird diese Serie mit 24 Punkten gewertet, es müssen also nur vier der sechs angegebenen Aufgaben gelöst werden. Sollten Sie mehr als 24 Punkte erreichen, bekommen Sie die weiteren Punkte als Zusatzpunkte.

Abgabe: *(Feiertagsbedingte Sonderregelung) Mittwoch, 30. Mai 2018, 11:00, in den Briefkästen in Raum A 514.*

Aufgabe 1 (6 Punkte) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\partial_1(f \circ g)(p) + \partial_2(f \circ g)(p) + \partial_3(f \circ g)(p) = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn φ ein Homöomorphismus ist und wenn sowohl φ als auch φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

a) Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$B := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| < 1\} \ .$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : B \to \mathbb{R}^n \ , \quad \varphi(u) = \frac{u}{\sqrt{1 - \|u\|^2}} \ ,$$

ein Diffeomorphismus ist!

b) Konstruieren Sie einen Diffeomorphismus $\psi : (-1, 1)^n \to \mathbb{R}^n$ und zeigen Sie, dass B und $(-1, 1)^n$ diffeomorph sind!

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U und V von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass das folgende Gleichungssystem für jedes $(u,v) \in V$ eine eindeutige Lösung in U besitzt:

$$\begin{cases} y + x^2 \cos y - \sin(x^2) & = u \ , \\ \sin x + xy & = v \ . \end{cases}$$

b) Bestimmen mit Hilfe des Satzes von Taylor Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Lösung $(x = x(u,v), y = y(u,v))$ aus Teil a) die folgende Gestalt hat:

$$x(u,v) = au + bv + r_1(u,v) \ ,$$
$$y(u,v) = cu + dv + r_2(u,v) \ ,$$

wobei $r = (r_1, r_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion ist mit $\lim_{(u,v)\to 0} \frac{\|r(u,v)\|}{\|(u,v)\|} = 0$ bezüglich der euklidische Norm.

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte = 4 Punkte + 4* Zusatzpunkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten im Folgenden den Raum der symmetrischen reellen $n \times n$-Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ als normierten Vektorraum bezüglich der Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{|x|\le 1} |Ax| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|Ax|}{|x|} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}},$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne und die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}, \qquad F(A) = A^2.$$

a) Zeigen Sie, dass F zweimal stetig differenzierbar ist und geben Sie die Differentiale erster und zweiter Ordnung an.

b) Für welche $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ ist $DF(A_0)$ nicht invertierbar?

c) Zeigen Sie, dass für geeignetes $\rho > 0$ für jedes $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ mit $\|A_0 - I\| < \rho$ gilt, dass $DF(A_0)$ invertierbar ist, wobei I die Einheitsmatrix vom Rang n bezeichne.

d) Betrachte nun den Fall $n = 3$ und die Matrix

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}.$$

Schreiben Sie die Bedingung $DF(A_0)(B) = 0$ für beliebiges $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ als lineares Gleichungssystem mit sechs Gleichungen. Zeigen Sie, dass $DF(A_0)$ invertierbar ist und formulieren Sie die Bedingung $DF(A_0)^{-1}(B) = Z$ für beliebige $B, Z \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ als lineares Gleichungssystem mit sechs Gleichungen.

Aufgabe 5* (3+3 Punkte)

Vorbemerkung: Diese Aufgabe war bereits als Aufgabe 5 auf dem vergangenen Übungszettel zu finden. Wir haben jedoch leider erst nach dem Abgabetermin festgestellt, dass in der Aufgabe an entscheidender Stelle Betragsstriche fehlten, so dass die Aufgabe in der Form nicht lösbar war, wofür wir uns entschuldigen möchten. Wir stellen dieselbe Aufgabe daher mit dieser Serie noch einmal.

Sei ψ_λ für $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben wie in Aufgabe 4 und setze $\psi := \psi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $\rho_i \in (0, +\infty)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := x + \sum_{i=1}^{\infty} \psi\Big(\frac{\big|x - \frac{1}{i}\big|}{\rho_i}\Big) \cdot \Big(\frac{2}{i} - 2x\Big).$$

Man beweise:

a) φ ist für geeignete Wahlen der ρ_i wohldefiniert und differenzierbar mit $\varphi'(\frac{1}{i}) = -1$ für jedes $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

b) Sei $r > 0$ und sei $a : (0, r) \to (0, +\infty)$ eine monoton fallende Funktion mit $\lim_{x\to 0} a(x) = +\infty$. Dann können die Zahlen ρ_i, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so gewählt werden, dass

$$|\varphi(x) - x| \cdot a(|x|) < 1 \quad \forall x \in (-r, r) \setminus \{0\}.$$