Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 29. 11. 2016

Übungen zur Vorlesung

Mathematik I für Physiker

Blatt 8

In der Mathematik gibt es keine Autoritäten. Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.
K. Urbanik (1930-2005)

Aufgabe 1. (*Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren*)
Orthonormalisieren Sie die folgenden Systeme linear unabhängiger Vektoren mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$.

b) ***(2 Punkte)*** $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 2)$, $v_3 = (8, 0, 0)$.

Aufgabe 2. (*Orthogonale Projektion*)

Betrachten Sie die Ebene $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$.

a) ***(1 Punkt)*** Zeigen Sie, dass E ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) ***(3 Punkte)*** Finden Sie eine Orthonormalbasis von E, zum Beispiel mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion Pv von v auf E für

   1) ***(1 Punkt)*** $v = (0, 0, 1)$,
   2) ***(1 Zusatzpunkt)*** $v = (1, 1, 1)$.

d) Berechnen Sie $M^\perp$.

Aufgabe 3. (*Parallelogramm- und Polarisierungsgleichung*)
Sei $V := \mathbb{K}^d$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) ***(2 Punkte)*** (Parallelogrammgleichung) Für alle $u, v \in V$ gilt

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Was bedeutet diese Gleichheit geometrisch?

b) ***(2 Zusatzpunkte)*** (Polarisierungsgleichung für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt, so kann man das Skalarprodukt wie folgt aus der Norm rekonstruieren:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \right) \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

c) (Polarisierungsgleichung für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, so kann man das Skalarprodukt wie folgt aus der Norm rekonstruieren:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2\right).$$

Aufgabe 4. (*Quadratische Formen*)

a) ***(2 Punkte)*** (Lorentz-Form) Betrachte $V := \mathbb{R}^4$ und $Q : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Q(u, v) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

für $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Ist Q eine quadratische Form? Ist sie positiv definit? (Bemerkung: Diese Form wird in der Relativitätstheorie benutzt, um raum- und zeitartige Richtungen voneinander zu separieren.)

b) Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Q : V \times V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Wie lauten die Parallelogramm- und Polarisierungsgleichung aus Aufgabe 3 für Q? Gelten sie?

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 6. 12. 2016 abzugeben.