Matrikelnummer:	_ | _ | _ | _ | _ | _ | _
Übung:	☐ 10.15 Uhr ☐ 15.15 Uhr ☐ Mittwoch

1	2	3

Mathematik für Biologen und Biochemiker

Aufgabenblatt 4

Wintersemester 2018/19
Abgabe ausschließlich in der Vorlesung am Mittwoch, dem 12.12.2018

Aufgabe 4.1. Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\tilde{g} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\tilde{h} : (1, \infty) \to (0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) := x^2, \quad g(x) := \sqrt{x}, \quad \tilde{g}(x) := \sqrt{x}, \quad h(x) := \ln(x) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{h}(x) := \ln(x).$$

Welche der Funktionen und Ausdrücke

(a) $f \circ g$, $(f \circ g)(x)$, $f(g(x))$,

(b) $g \circ f$, $(g \circ f)(x)$, $g(f(x))$,

(c) $\tilde{g} \circ f$, $(\tilde{g} \circ f)(x)$, $\tilde{g}(f(x))$,

(d) $h \circ h$, $(h \circ h)(x)$, $h(h(x))$,

(e) $h \circ \tilde{h}$, $(h \circ \tilde{h})(x)$, $h(\tilde{h}(x))$,

sind für welche Werte von x sinnvoll definiert? Berechnen Sie die sinnvollen Ausdrücke.

Aufgabe 4.2. Das Phosphorisotop ^{32}P hat eine Halbwertszeit von 14,2 Tagen und zerfällt nach dem Gesetz $c(t) = c_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, wobei t die Zeit (in Stunden) bezeichnet und λ *Zerfallsrate* heißt.

(a) Bestimmen Sie die Zerfallsrate λ.

(b) Nach welcher Zeit t_5 (in Stunden) hat eine Probe 5 % ihrer Aktivität verloren?

Aufgabe 4.3. Sei X eine Menge und $e : X \to X$ ein Einselement bezüglich der Verkettung in der Menge aller Abbildungen $f : X \to X$, d.h. es gelte

$$e \circ f = f \circ e = f$$

für alle $f : X \to X$. Zeigen Sie, dass $e = \mathrm{id}_X$.
Anmerkung: Es gibt also nur ein Einselement bezüglich der Verkettung. Mit anderen Worten: Das Einselement ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4.4. Für eine natürliche Zahl x werde der Rest $0, 1, 2, 3$, der nach der Division von x durch 4 bleibt, mit $x \bmod 4$ bezeichnet.

(a) Wieso ist die Zuordnung $x \mapsto x \bmod 4$ eine Funktion? Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f und geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat an.

(b) Bestimmen Sie i) $f \circ f \circ f$, ii) $f \cdot f$ und iii) $3f + (f \cdot f)$.

Aufgabe 4.5. Eine Strecke habe die Länge $c = a + b$, wobei $a > b > 0$ derart gewählt seien, dass

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b},$$

d.h. die gesamte Länge verhalte sich zu der längeren Teilstrecke wie die längere Teilstrecke sich zu der kürzeren Teilstrecke verhält. In diesem Fall wird dieses Verhältnis $\frac{c}{a} = \frac{a}{b}$ auch *goldener Schnitt* genannt und mit Φ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

(b) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Mit dem *Sinus hyperbolicus* $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ gilt $(\sinh \circ \ln)(\Phi) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4.6. Wir betrachten die zwei reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ und $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := e^x$ und $g(x) := \ln(x)$. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion von f durch g gegeben ist. Benutzen Sie dabei, dass aus $e^z = e^x$ bereits $z = x$ folgt.