UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I

Wintersemester 2012/13

Blatt 5 — Abgabetermin: bis Donnerstag, 29.11.2012, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert mit $x^2 = 2$. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Nehmen Sie an, dass $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ derart existieren, dass $(\frac{p}{q})^2 = 2$ gilt.

(ii) Überlegen Sie sich, dass dann auch teilerfremde Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ derart existieren, dass $(\frac{m}{n})^2 = 2$ gilt.

(iii) Leiten Sie einen Widerspruch her, indem Sie einen gemeinsamen Teiler von n und m finden.

Aufgabe 2 (3+2=5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ versehen mit komponentenweiser Addition $+$ und der Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ um einen Körper handelt.

(b) Auf der kommutativen Gruppe $(M, +)$ aus Blatt 3, Aufgabe 2, definieren wir eine Multiplikation $\cdot : M \times M \to M$ durch die Tabelle

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Zeigen Sie, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Ist $ad - bc \neq 0$, so ist $cx + d \neq 0$ und $\frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(*Hinweis: Führen Sie jeweils einen Widerspruchsbeweis und unterscheiden Sie mögliche Fälle.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(1+(2+2)=5 Punkte)**

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Identitäten

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \text{und} \quad \min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

(b) Geben Sie die folgenden Mengen reeller Zahlen in Form von (Vereinigungen von) Intervallen an:

(i) $M = \{x \in \mathbb{R};\ |5x + 3| - |3x - 2| \geq 5\}$.

(ii) $N = \{x \in \mathbb{R};\ x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2\}$.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Menge

$$A = \{(-1)^n + \tfrac{1}{m};\ n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\}$$

und begründen Sie Ihre Aussage. Untersuchen Sie auch, ob es sich dabei um ein Maximum bzw. Minimum handelt.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI1_12_13/Ueb/uebhmi1