Dr. Oliver Labs (Labs@math.uni-sb.de)
Florian Geiß (fg@math.uni-sb.de)

Blatt 4
13.05.2009

Mathematik für Informatiker II

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 20.05.2009 vor der Vorlesung abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

1. *Austauschbarkeit von Basiselementen:*
   Seien $v_1 = (1,3,-2,2)^t,\ v_2 = (-3,2,-1,1)^t,\ v_3 = (1,3,-2,3)^t$.
   $$V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$
   (a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis von V bilden.
   (b) Ist es möglich, einen der Vektoren v_1, v_2, v_3 durch $v = (-5,-4,3,-5)^t$ auszutauschen, so dass man wieder eine Basis von V erhält? Wenn ja, welchen?
   (c) Ist es möglich, einen der Vektoren v_1, v_2, v_3 durch $w = (-1,2,-3,4)^t$ auszutauschen, so dass man wieder eine Basis von V erhält? Wenn ja, welchen?
   (d) Geben Sie einen Vektor $v_4 \in \mathbb{R}^4$ an, der v_1, v_2, v_3 zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt.

2. *Matrizen:*
   (a) Seien
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie AB und BA. Können Sie $AB \neq BA$ auch ohne Rechnen einsehen?
   (b) Bestimmen Sie alle Matrizen der Form
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$
   für die gilt:
   $$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$
   (c) Man sagt, eine $n \times n$ Matrix M kommutiert mit einer $n \times n$ Matrix N, wenn $MN = NM$. Bestimmen Sie alle reellen 2×2 Matrizen, die mit jeder reellen 2×2 Matrix kommutieren.

3. *Endliche Körper:* Sei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit 5 Elementen. Wieviele verschiedene Basen hat $\mathbb{F}_5^3$?

4. *Dimension von Vektorräumen:* Seien V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_r \subset V$ Untervektorräume von V. Dann definiert man
   $$U_1 + \ldots + U_r := \{v \in V \mid v = v_1 + \ldots + v_r \text{ mit } v_j \in U_j\}.$$
   Zeigen Sie:
   (a) $U_1 + \ldots + U_r$ ist ein Untervektorraum von V.
   (b) $\dim(U_1 + \ldots + U_r) \leq \dim U_1 + \ldots + \dim U_r$.