UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014
Die Lösungen des Übungsblattes sind am 25.06.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 9 18. Juni 2014

Aufgabe 1 (Unitäre Matrizen)**.** Sei $A \in U(n) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie: $\exists\, S \in U(n)$ mit:

$$\bar{S}^{\mathrm{t}}\, A\, S = D =: \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A sind. Zeigen Sie ferner, dass gilt: $|\lambda_i| = 1$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement W eines Eigenvektors v von A von der Matrix A in sich abgebildet wird, d.h. $AW \subset W$.

Aufgabe 2 (Orthogonale Projektion)**.** Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem standard Skalarprodukt versehen. Seien

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Orthonormalisieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Basis w_1, w_2, w_3, w_4 von $\mathbb{R}^4$.
(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ auf $U_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$.

Aufgabe 3 (Orthonormalisierungsverfahren)**.**

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $1, x, x^2, x^3$ eine Orthonormalbasis des Vektorraumes $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ bezüglich der Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)x^2 dx, \\ \langle p, q \rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)(1-x^2) dx. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie bezüglich beider Skalarprodukte aus (a) die orthogonale Projektion $\pi(f)$ von $f = x^2(x^2-1) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ auf U und fertigen Sie Zeichnungen (z. B. mit Maple) von f und $f - \pi(f)$ an.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (Fourierkoeffizienten)**.** Sei

$$\varphi : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

die Treppenfunktion.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von φ für die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.

(b) Zeichnen Sie (z. B. mit Maple) $\varphi(x)$ sowie

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)\pi}$$

für die Werte $n = 2, 5$ und 10.