Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 11 Abgabe: Mittwoch, 06. Juli

Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Matrizen ist über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ eine invertierbare Matrix über einem Körper K und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $\lambda \neq 0$ ist und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie A^{789}.

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $x_0 = a$, $x_1 = b$ und $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ für $n \geq 2$.

(a) Schreiben Sie die Rekursion in der Form $y_n = A \cdot y_{n-1}$, wobei A eine 2×2 Matrix ist und $y_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $A = S^{-1}DS$.

(c) Bestimmen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} SA^nS^{-1}$.

(d) Leiten Sie daraus $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ab.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Seien

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Orthonormalisieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Basis w_1, w_2, w_3, w_4 von $\mathbb{R}^4$.