Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 1 | Abgabe: Mo, 21. Oktober 2013, bis 16^{00} Uhr,

Sachs/Groß | Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Die Übungsaufgaben können in Zweiergruppen abgegeben werden.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ mit hinreichend glattem $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Leiten Sie eine Formel für die globale Konvergenzordnung eines Lösungsverfahrens unter der Annahme her, dass Sie die analytische Lösung $y(\cdot)$ der Differentialgleichung kennen.

Beachten Sie dazu, dass ein Verfahren die Konvergenzordnung $k > 0$ hat, bedeutet, dass für die Iterierten η_i^h des Verfahrens mit Schrittweite h unter geeigneten Voraussetzungen gilt

$$\epsilon(h) = \max_{i=0,\ldots,n} |\eta_i^h - y(x_i)| = \mathcal{O}(h^k) = ch^k + \mathcal{O}(h^{k+1}).$$

Wie lassen sich nun die Konvergenzordnung $k > 0$ und die Konstante $c > 0$ numerisch berechnen, falls die analytische Lösung $y(\cdot)$ und approximierte Lösungen η^h mit unterschiedlicher Schrittweite $h > 0$ bekannt sind?

Programmieraufgabe 1: (10 Punkte)

Die Population des Fichtenknospen-Wurms (spruce budworm), der in der Lage ist, mit hoher Effizienz die kanadische Balsamfichte zu entnadeln, wird durch folgendes Populationsmodell beschrieben:

$$\begin{aligned} P'(t) &= aKP(t) - aP^2(t), \quad 0 \le t \le T \\ P(0) &= P_0. \end{aligned}$$

Hierbei ist a die Vermehrungsrate des Fichtenknospen-Wurms und K die Sättigungspopulation, die durch die Dichte der verfügbaren Fichten gegeben ist. Im folgenden sei $a = 0.1$, $K = 20$ und $T = 5$.
Die obige Anfangswertaufgabe (AWA) wird durch folgende Funtkion exakt gelöst:

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\,\mathrm{e}^{-aKt}}$$

Programmieren Sie mit **MATLAB** das explizite Euler-Verfahren,

$$\eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_i, \eta_i)$$

das Heun-Verfahren

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, \eta_i) + f(x_i + h, \eta_i + hf(x_i, \eta_i))\right)$$

und das folgende explizite Verfahren,

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left(f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \frac{2h}{3}, \eta_i + \frac{2h}{3}f(x_i + \frac{h}{3}, \eta_i + \frac{h}{3}f(x_i, \eta_i)))\right), \qquad (*)$$

zur Lösung der obigen Differentialgleichung mit den Schrittweiten $h = \frac{T}{2^m}$, $m = 1, 2, \ldots, 13$ und Anfangswert $P_0 = 2$. Vergleichen Sie die approximierte Lösung mit deren exakter Lösung. Für jede Schrittweite h berechnen Sie dazu den Fehler

$$\epsilon(h) := \max_{i=1,\ldots,n} |\eta_i - P(x_i)|\,,$$

wobei $x_i = 0 + hi$, $i = 1, \ldots, n$ und n Anzahl der Diskretisierungspunkte, welche aus der Wahl der Schrittweite resultiert. Geben Sie die Quotienten $\epsilon(h)$, $\epsilon(h)/h$, $\epsilon(h)/h^2$, $\epsilon(h)/h^3$, $\epsilon(h)/h^4$ tabellarisch aus. Welche Ordnung haben die Verfahren? (Zusammenhang Aufgabe 1)
Drucken Sie die Graphen des berechneten Populationsbestandes P auf dem Intervall $[0, 5]$ für die 2 Schrittweiten $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{2^{10}}$ aus und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch.

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt oder .m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.
Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!