J. Wengenroth
T. Schlierkamp

SS 2015
08.07.2015

Differentialgleichung
Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 15.07.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 15.07.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 41 (2+2 Punkte)
Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\omega \in \Omega_0^k(U)$ eine stetige k-Form auf U und $h \in C^1(V,U)$, $g \in C^1(W,V)$. Zeigen Sie:

(a) $(h \circ g)^*(\omega) = g^*(h^*(\omega))$;

(b) falls $m = n$ und h ein C^1-Diffeomorphismus ist ($\exists h^{-1} \in C^1(U,V)$), gilt

$$(h^{-1})^*(dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_n) = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \, .$$

Aufgabe 42 (3 Punkte)
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h \in C^1(V,U)$ sowie $\varphi \in C^1(V,\mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$h^*(\varphi \, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n) = (\varphi \circ h) \det(h') \, ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n \, ,$$

wobei $\det(h') : V \to \mathbb{R}$, $\det(h')(t) = \det J_h(t)$ und $J_h(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Jacobi-Matrix an der Stelle $t \in V$ sind.
Hinweis: Fassen Sie φ als 0-Form auf und nutzen Sie $\varphi \wedge \omega = \varphi \cdot \omega$ für beliebige k-Formen ω.

Aufgabe 43 (2+1+3+3 Punkte)
Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x\cos(y), x\sin(y))$. Berechnen Sie

(i) $f^*(dx)$ (ii) $f^*(dy)$
(iii) $f^*(dx \wedge dy)$ (iv) $d(f^*dx)$.

Hinweis: Hier werden die Koordinatenabbildungen („Variablen“) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit x und y bezeichnet.

Aufgabe 44 (2+2 Punkte)
Es seien (wie in A33) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine berandete n-dim. C^k-Mfk, W eine offene Obermenge von M und $F : W \to \mathbb{R}^d$ eine C^k-Einbettung ($d \geq m$).

(a) Zeigen Sie, falls M eine orientierbare Mfk ist, dass auch $F(M)$ orientierbar ist.

(b) Trotz (a) wird die äußere Normale $\nu(x)$ für $x \in \partial M$ nicht erhalten unter F. Geben Sie ein Beispiel an, wo $\nu(F(x)) \neq F(\nu(x))$ ist. (Betrachten Sie beispielsweise $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ auf der Mfk $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$ und die äußere Normale ν an $(0,0)$.)