J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 13

Besprechung in der Übung am 9. Februar, 8:30 in E44

Aufgabe 42.

Für einen topologischen Raum Ω versehen wir $C(\Omega)$ mit $\mathscr{P} = \{\|\cdot\|_K : K \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass jede selbstadjungierte, punktetrennende Unteralgebra von $C(\Omega)$ ohne gemeinsame Nullstelle dicht in $C(\Omega)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{span}\{\exp(i\langle\cdot,y\rangle : y \in \mathbb{R}^d\}$ is $C(\mathbb{R}^d)$ dicht ist.

Aufgabe 43.

Seien $U_n \subseteq \mathbb{C}$ offene, beschränkte und zusammenhängende Mengen mit $U_{n+1} \subseteq U_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$ und $X_n = H(U_n)$ versehen mit den üblichen $\mathscr{P}_n = \{\|\cdot\|_K : K \subseteq U_n$ kompakt$\}$. Wegen des Identitätssatzes ist die Einschränkung $H(U_n) \to H(U_{n+1})$, $f \mapsto f|_{U_{n+1}}$ injektiv, so dass wir X_n als Teilraum von X_{n+1} auffassen können. Zeigen Sie für den induktiven Limes $(X_\infty, \mathscr{P}_\infty) = \lim\limits_{\to}(X_n, \mathscr{P}_n)$, dass $\mathscr{P}_\infty = \{0\}$.

Hinweis. Wegen des Satzes von Hahn-Banach reicht dafür $X'_\infty = \{0\}$. Definieren Sie für $\varphi \in X'_\infty$ durch $g(z) = \varphi(w \mapsto 1/(z-w))$ eine Funktion g und zeigen Sie $g \in H(\mathbb{C})$ sowie $g(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Der Satz von Liouville impliziert dann $g = 0$.

Aufgabe 44.

Seien $(X, \mathscr{P})$ und $(Y, \mathscr{Q})$ lokalkonvexe Räume. Wir versehen $X \cap Y$ mit dem Halbnormensysten $\{z \mapsto \max\{p(z), q(z)\} : p \in \mathscr{P}, q \in \mathscr{Q}\}$. Zeigen Sie $(X \cap Y)' = X' + Y'$ (d.h. für $\varphi \in X'$ und $\psi \in Y'$ ist durch $z \mapsto \varphi(z) + \psi(z)$ ein stetiges lineares Funktional auf $X \cap Y$ definiert und jedes Element von $(X \cap Y)'$ ist von dieser Form).

Aufgabe 45.

Seien $(X_n, \mathscr{P}_n)$ separierte lokalkonvexe Räume und $(Y_n, \mathscr{Q}_n) = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : x_k = 0 \text{ für } x > n\}$ versehen mit der Relativtopologie von Produkt. Dann heißt $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n = \lim\limits_{\to} Y_n$ die lokalkonvexe direkte Summe der X_n. Zeigen Sie

(a) Jede beschränkte Teilmenge B von $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist in einem Y_n enthalten und dort beschränkt.

(b) Für absolutkonvexe Nullumgebungen U_n in X_n ist $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n \cap \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ eine Nullumgebung in der direkten Summe und jede Nullumgebung enthält eine von dieser Form.

(c) Falls $X_n \subseteq X_{n+1}$ mit stetigen Inklusionen für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist durch

$$s : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \lim_{\to} X_n, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

eine lineare, stetige und offene Abbildung definiert.