Übungen zur Vorlesung
Mathematik III für Informatiker und Bioinformatiker

Wintersemester 2008/09 — Blatt 4

W.Knapp — Tübingen, den 4. November 2008

21. Sei A eine beliebige nichtleere Menge und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren den *Hamming-Abstand* d_H in A^n durch
$d_H : A^n \times A^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto d_H(x, y) := |\{k \in \{1, \ldots, n\} : x_k \neq y_k\}|$.
Beweisen Sie, dass d_H eine Metrik auf A^n im Sinne von (2.9) der Vorlesung ist.

22. Berechnen Sie im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, (\cdot \mid \cdot))$ die Winkel
$\sphericalangle((-1, 1), (\sin(\alpha), \cos(\alpha)))$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie Vektoren und Winkel für drei verschiedene $\alpha \in [0, 2\pi[$.

(6 Punkte)

23. Es sei (V, β) ein euklidischer Raum und für ein $\pi \in \mathrm{End}(V)$ gelte $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$ und für alle $x \in V$ gelte $\beta(\pi(x), \pi(x)) = \beta(x, \pi(x))$. Beweisen Sie, dass dann $\mathrm{Ker}\,(\pi) = \mathrm{Im}\,(\pi)^\perp$ und $\mathrm{Im}\,(\pi) = \mathrm{Ker}\,(\pi)^\perp$ gilt; damit ist π die Orthogonalprojektion von V auf $\mathrm{Im}\,(\pi)$.

24. Es sei $V := \langle (1, -1, 1), (2, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x \mid y)$. Dann ist (V, β) ein euklidischer Raum.
    (i) Bestimmen Sie mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von (V, β).
    (ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, (\cdot \mid \cdot))$, welche eine Orthonormalbasis von (V, β) enthält.

(8 Punkte)

25. Für ein $n \in \mathbb{N}$ setze $V := \mathbb{C}^n$ und $\gamma : V \times V : (u, v) \mapsto \gamma(u, v) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{u_j} v_j$.
Weiter sei $\omega := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$.
    (i) Beweisen Sie, dass dann γ ein (komplexes) Skalarprodukt ist.
    (ii) Zeigen Sie, dass $B := \{b_k : 0 \leq k \leq n - 1\}$ mit $b_k := (\omega^{(j-1)k})_{1 \leq j \leq n} = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k})$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ eine Orthonormalbasis des unitären Vektorraums (V, γ) ist.

(6 Punkte)

Die Übungsaufgaben 22, 24 und 25 sind schriftlich zu bearbeiten und am Mittwoch, dem 12. November 2008 in der Vorlesungspause abzugeben.