Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

WiSe 2020/21
08.03.2021

Musterlösungen zur Klausur der Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 1. (a) Geben Sie die Definition einer σ-Algebra auf einer Menge X.

(b) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{A} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra auf X ist. Hierbei soll eine Menge $A \subseteq X$ abzählbar heißen, wenn A endlich oder abzählbar unendlich ist.

Lösungsvorschlag. (a) Eine σ-Algebra auf einer Menge X ist eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, so dass gilt:

- $X \in \mathfrak{A}$;
- ist $A \in \mathfrak{A}$, so auch A^c;
- sind $A_k \in \mathfrak{A}$ $(k \in \mathbb{N})$, so auch $\bigcup_k A_k$.

(b) Die angegebene Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist eine σ-Algebra, denn:

- $X \in \mathfrak{A}$, weil $X^c = \emptyset$ und die leere Menge abzählbar ist.
- Ist $A \in \mathfrak{A}$, so ist also A abzählbar oder A^c ist abzählbar. Wegen $A^{cc} = A$ ist also: A^c abzählbar oder $(A^c)^c$ ist abzählbar. Also ist auch $A^c \in \mathfrak{A}$.
- Seien $A_k \in \mathfrak{A}$ $(k \in \mathbb{N})$.

  1. Fall: A_k sei abzählbar, für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit Cantors Diagonalargument ist dann auch $\bigcup_k A_k$ abzählbar.

  2. Fall: Es gebe ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A_{k_0}^c$ abzählbar ist. Wegen

  $$(\bigcup_k A_k)^c = \bigcap_k A_k^c \subseteq A_{k_0}^c$$

  ist dann auch $(\bigcup_k A_k)^c$ abzählbar.

  Es ist also $\bigcup_k A_k$ auch in $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, messbarer Funktionen, $f_n : X \to [0, \infty]$. Zeigen Sie:

$$\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

(b) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar und $A \in \mathfrak{A}$ und ferner $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Familie disjunkter Teilmengen von A mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Zeigen Sie:

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu.$$

Lösungsvorschlag. (a) Das ist ein Fall für Beppo Levi. Wir setzen $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \colon X \to [0, \infty]$. Es ist dann auch g_n messbar und damit auch ihr punktweiser Limes

$$g := \lim_{n\to\infty} (g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Außerdem strebt (g_n) offenbar monoton wachsend gegen g, da alle $f_n \geq 0$ sind $(n \in \mathbb{N})$. Es folgt mit der Linearität des Integrals und Levis Konvergezsatz:

$$\int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

(b) Das ist ein Fall für Henri Lebesgue. Da A die disjunkte Vereinigung der A_n $(n \in \mathbb{N})$ ist, gilt für die charakteristischen Funktionen $\chi_A, \chi_{A_n} \colon X \to (0, \infty)$:

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}.$$

Wir setzen nun $g_n \colon X \to \mathbb{R}$,

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} f\chi_{A_k} = f\chi_{A_1\cup\cdots\cup A_n},$$

und stellen fest, dass g_n messbar ist und durch das integrierbare $|f|$ majorisiert wird,

$$|g_n| = |f|\chi_{A_1\cup\cdots\cup A_n} \leq |f|\chi_A \leq |f|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Eigentlich brauchen wir für die Aufgabe nur, dass $f\chi_A$ integrierbar ist.) Außerdem konvergiert (g_n) offenbar gegen $f\chi_A$, welches natürlich auch integrierbar ist. Mit der Linearität des Integrals und Lebesgues Konvergenzsatz sehen wir daher, dass

$$\int_A f\, d\mu = \int f\chi_A\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{A_k}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu.$$

Aufgabe 3. **(a)** Formulieren Sie das Prinzip von Cavalieri, wahlweise für Kompakta im $\mathbb{R}^3$ oder in einer allgemeineren Version.

(b) Es seien die Zylinder $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$$

und

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Betrachten Sie $M := A \cap B$ und bestimmen Sie das Volumen $\lambda^3(M)$ von M.

Lösungsvorschlag. **(a)** Das klassische Prinzip von Cavalieri besagt: Sind $K, L \subseteq \mathbb{R}^3$ Körper (sagen wir kompakte Teilmengen), so dass die Schnitte $K_z = \{(x, y, t) \in K : t = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$, und ähnlich für L_z, gleichen Flächeninhalt haben, $\lambda^2(K_z) = \lambda^2(L_z)$, für alle $z \in \mathbb{R}$, so haben K und L auch gleiches Volumen, $\lambda^3(K) = \lambda^3(L)$.

In der allgemeinen Version besagt es, dass in einem Produkt von Maßräumen $(X_1 \times X_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ (wenn beide Faktoren $(X_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ $(j = 1, 2)$ σ-endlich sind) für jedes $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ gilt:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1.$$

(b) Wir betrachten die z-Schnitte von A und B für alle $z \in [0, 1]$. Wegen

$$y^2 \leq 1 - z^2 \ \Leftrightarrow\ y \in [-\sqrt{1 - z^2}, +\sqrt{1 - z^2}]$$

ist

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1, 1],\ y \in [-\sqrt{1 - z^2}, \sqrt{1 - z^2}]\} = [-1, 1] \times [-\sqrt{1 - z^2}, \sqrt{1 - z^2}]$$

und

$$B_z = [-\sqrt{1 - z^2}, \sqrt{1 - z^2}] \times [-1, 1].$$

Damit ist M_z das Quadrat

$$M_z = (A \cap B)_z = A_z \cap B_z = [-\sqrt{1 - z^2}, \sqrt{1 - z^2}]^2$$

und hat damit Flächeninhalt

$$\lambda^2(M_z) = (2\sqrt{1 - z^2})^2 = 4(1 - z^2).$$

Es folgt mit Cavalieri:

$$\lambda^3(M) = \int_{-1}^{1} \lambda^2(M_z)\, dz = 2 \cdot \int_0^1 4(1 - z^2)\, dz = 8 \cdot (z - \frac{z^3}{3})|_0^1 = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

Aufgabe 4. Sei

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}.$$

Berechnen Sie das Volumen $\lambda^3(P)$ des Kugelsektors $P = \mathbb{B}^3 \cap K \subseteq \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag. Wir benutzen die üblichen Kugelkoordinaten $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $(r,\vartheta,\varphi)\mapsto \Phi(r,\vartheta,\varphi)$, bei denen der Breitengrad $\vartheta\in(0,\pi)$ vom Nordpol aus gemessen wird. Φ hat Jacobische

$$J_\Phi(r,\vartheta,\varphi) = r^2\sin\vartheta,$$

und der Bereich, der unter Φ auf den Kugelsektor P abgebildet wird, ist gerade

$$G = (0,1]\times(0,\frac{\pi}{4}]\times(0,2\pi).$$

Dabei wird der volle Sektor P durch $\Phi|G$ getroffen, bis auf den Durchschnitt von P mit der „Halbebene“

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ y=0,\ x\geq 0\},$$

die aber eine λ^3-Nullmenge ist. Deshalb können wir mit der Transformationsformel und dem Satz von Tonelli das Sektorvolumen so berechnen:

$$\begin{aligned}\lambda^3(P) &= \int_G J_\phi(r,\vartheta,\varphi)\,drd\vartheta\varphi = (\int_0^1 r^2\,dr)(\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\,d\vartheta)(\int_0^{2\pi} d\varphi)\\ &= \frac{1}{3}r^3|_0^1\cdot(-\cos\vartheta)|_0^{\pi/4}\cdot\varphi|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(1-\cos\frac{\pi}{4})\cdot 2\pi.\end{aligned}$$

Mit $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ wird dies zu

$$\lambda^3(P) = \frac{2\pi}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$$

Aufgabe 5. (a) Betrachten Sie die folgende injektive Abbildung $\Phi : (0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^3$, welche gegeben sei durch $(\varphi,\vartheta)\mapsto(\cos\varphi\cos\vartheta,\sin\varphi\cos\vartheta,\sin\vartheta)$. Bestimmen Sie das Bild von Φ und begründen Sie, dass das Komplement des Bildes in $\mathbb{S}^2$ eine Nullmenge bezüglich des zweidimensionalen Hausdorffmaßes $\mathcal{H}^2$ ist.

(b) Betrachten Sie zu $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ die Menge

$$M_\alpha := \{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2 :\ |z|\leq\sin\alpha\}\subseteq\mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie jenen Winkel $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$, für welchen

$$\mathcal{H}^2(M_\alpha) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2)$$

gilt.

Lösungsvorschlag. (a) Das Bild von Φ ist ganz $\mathbb{S}^2$ ohne den „Halbmeridian“

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2 :\ y=0,\ x\geq 0\}.$$

Da das 2-dimensionale Hausdorff-Maß bewegungsinvariant ist, hat M den gleichen Flächeninhalt wie z.B. sein Spiegelung an der Ebene $\{x=0\}$,

$$\bar{M} = \{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2 :\ y=0,\ x\leq 0\}.$$

Bis auf den Nordpol $N \in \mathbb{S}^2$ und den Süpol $S \in \mathbb{S}^2$ liegt aber $\bar{M}$ im Bild der Parametrisierung Φ, ist nämlich das Bild von

$$G = \{\pi\} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Dieser Streckenzug ist aber eine λ^2-Nullmenge, weil er in der Geraden $\{\varphi = \pi\}$ enthalten ist. Deshalb ist auch $\bar{M} \setminus \{N, S\}$ eine $\mathcal{H}^2$-Nullmenge im $\mathbb{R}^3$. Mit einem ähnlichen Argument (oder direkt aus der Definition des Hausdorffmaßes) sieht man, dass auch $\{N\}$ und $\{S\}$ $\mathcal{H}^2$-Nullmengen sind, so dass insgesamt M eine $\mathcal{H}^2$-Nullmenge ist. (Alternativ kann man auch so argumentieren: Man parametrisiert den Kreisbogen M mit einer regulären Parametrisierung und zeigt, dass sein $\mathcal{H}^1$-Maß endlich ist. (Die Länge dieses Bogens ist $\pi < \infty$.) Aus einer Übungsaufgabe (die auch für die sphärischen Hausdorff-Maße gilt) wissen wir dann, dass die höheren Hausdorffmaße $\mathcal{H}^s$ von M alle gleich Null sind, insbesondere also $\mathcal{H}^2(M)$.)

(b) Es ist klar, dass $M_\alpha \subseteq \mathbb{S}^2$ (für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$) unter Φ gerade von $G = (0, 2\pi) \times [-\alpha, \alpha]$ getroffen wird und dass dabei wiederum nur ein $\mathcal{H}^2$-Nullmenge von M_α verpasst wird. Wir können also den Flächeninhalt von M_α mit der Flächenformel berechnen, denn Φ ist eine reguläre Parametrisierung und ihre Jacobische ist $J_\Phi(\varphi, \vartheta) = \cos\vartheta$:

$$\mathcal{H}^2(M_\alpha) = \int_G J_\Phi(\varphi, \vartheta)\, d\varphi d\vartheta = (\int_0^{2\pi} d\varphi)(\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\vartheta\, d\vartheta) = 2\pi \cdot \sin\vartheta|_{-\alpha}^{\alpha} = 4\pi \sin\alpha,$$

denn $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$. Da $\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2) = 4\pi$ ist, kommt die Bedingung $\mathcal{H}^2(M_\alpha) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2)$ damit also auf

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

herunter, welches bekanntermaßen für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ (genau) bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ erfüllt wird ($\alpha = 30°$).

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^3 - xy^2, y^3 - x^2y + 3x)$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{S}^1} \langle f, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1,$$

wobei ν das äußere Normalenfeld an $\mathbb{S}^1$ sei.

Lösungsvorschlag. Es ist $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$ und f ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von $\mathbb{B}^2$. $\mathbb{B}^2$ ist Kompaktum mit glattem Rand und $\nu\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ ist sein äußeres Normalenfeld. Damit können wir den Divergenzsatz von Gauß anwenden und berechnen dazu die Divergenz $\operatorname{div}(f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{div}(f)(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = (3x^2 - y^2) + (3y^2 - x^2) = 2(x^2 + y^2).$$

Mit Polarkoordinaten (r, φ) für $\mathbb{B}^2$ und dem Volumenelement

$$dxdy = rdrd\varphi$$

(d.h. Jacobischen $J(r, \varphi) = r$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^1} \langle f, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1 &= \int_{\mathbb{B}^2} \operatorname{div}(f)(x, y)\, dxdy = 2\int_{\mathbb{B}^2} (x^2 + y^2)\, dxdy = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot rdrd\varphi \\
&= 4\pi \cdot (\frac{1}{4}r^4)|_0^1 = \pi.
\end{aligned}$$