Bemerkung Polynome multiplizieren:

$$(T^2+T+1)(T^2-2T-1) = T^4-2T^3-T^2+T^3-2T^2-T+T^2-2T-1$$
$$= T^4-T^3-2T^2-3T-1.$$

Konstruktion $\mathbb{k}$ Körper, $\mathbb{k}[T] :=$ Menge der Polynome in der Var. T über $\mathbb{k}$. Verknüpfungen:

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) + \left(\sum b_\nu T^\nu\right) := \sum (a_\nu + b_\nu) T^\nu,$$

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot \left(\sum b_\nu T^\nu\right) := \sum c_\nu T^\nu, \quad \text{wobei}$$

$$c_\nu := \sum_{\mu+\kappa=\nu} a_\mu b_\kappa .$$

Dann: $(\mathbb{k}[T],+,\cdot)$ kommut. Ring mit Eins ($\mathbb{k}1$-Ring). Dabei

$$0_{\mathbb{k}[T]} = 0_{\mathbb{k}} T^0, \qquad 1_{\mathbb{k}[T]} = 1_{\mathbb{k}} T^0.$$

Beweis Wissen (3.3.12): $(\mathbb{k}[T],+)$ ist abelsche Gruppe mit $0_{\mathbb{k}[T]} = 0_{\mathbb{k}} T^0$.

Noch z.z.: Ringaxiome mit "$\cdot$". Zeigen "$\cdot$" kommut.:

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot \left(\sum b_\nu T^\nu\right) = \sum \left(\sum_{\mu+\kappa=\nu} a_\mu b_\kappa\right) T^\nu$$

$$= \sum \left(\sum_{\kappa+\mu=\nu} b_\kappa a_\mu\right) T^\nu$$

$$= \left(\sum b_\nu T^\nu\right) \cdot \left(\sum a_\nu T^\nu\right).$$

Assoziativität von "$\cdot$" sowie Distributivität ebenfalls direkt nachprüfbar. □

Definition Sei

$$f = \sum a_\nu T^\nu \in \mathbb{k}[T].$$

Grad von f:

$$\deg(f) := \begin{cases} \max(\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0};\ a_\nu \neq 0_{\mathbb{k}}), & f \neq 0_{\mathbb{k}[T]}, \\ -\infty, & f = 0_{\mathbb{k}[T]}. \end{cases}$$

Falls $\deg(f) = n \geq 0$: Nenne a_n den *Leitkoeffizienten* von f.

Beispiel Betrachte $f = 5T^3 - T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$:

* $\deg(f) = 3$,
* Leitkoeffizient von f: 5.

Satz $\mathbb{k}$ Körper, $f, g \in \mathbb{k}[T]$ mit $\deg(g) \geq 0$. Dann besitzt f Darstellung

$$f = q g + r, \quad q, r \in \mathbb{k}[T], \quad \deg(r) < \deg(g).$$

Beweis Setze $m := \deg(f)$ und $n := \deg(g)$.

Dann:
$$f = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu T^\nu, \quad g = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu T^\nu.$$

Induktion über m. Zu "$m \leq 0$":

a) $n = \deg(g) \geq 1$: $f = \underbrace{0_{\mathbb{k}[T]}}_{q} \cdot g + \underbrace{f}_{r}$.

b) $n = \deg(g) = 0$: $f = \underbrace{\frac{f}{g}}_{q} \cdot g + \underbrace{0_{\mathbb{k}[T]}}_{r}$.

Zu "$k < m \to m$":

a) $m < n = \deg(g)$: $f = \underbrace{0_{\mathbb{k}[T]}}_{q} \cdot g + \underbrace{f}_{r}$

b) $m \geq n = \deg(g)$: Betrachte

$$f' := f - \frac{\overset{\text{Leitkoeff von } f}{a_m}}{\underset{\text{Leitkoeff von } g}{b_n}} \cdot T^{m-n} \cdot g$$

Dann: $\deg(f') < \deg(f) = m$. Ind.-Vor.:

$$f - \frac{a_m}{b_n} T^{m-n} g = f' = q' g + r'$$

mit $q', r' \in \mathbb{k}[T]$, $\deg(r') < \deg(g)$. Damit

$$f = \left(q' + \frac{a_m}{b_n} T^{m-n}\right) g + r'. \qquad \square$$

Definition Sei $f = a_n T^n + \ldots + a_1 T + a_0 \in \mathbb{k}[T]$.
Wert von f in $\lambda \in \mathbb{k}$:

$$f(\lambda) := a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \in \mathbb{k}.$$

Nenne $\lambda \in \mathbb{k}$ *Nullstelle* von f, falls $f(\lambda) = 0_{\mathbb{k}}$.

Satz $f \in \mathbb{k}[T]$, $\lambda \in \mathbb{k}$ NST von f. Dann:

$$f = q \cdot (T - \lambda) \quad \text{mit } q \in \mathbb{k}[T].$$

Beweis Haben $f = q(T-\lambda) + r$ mit $\deg(r) \leq 0$.

Jetzt: $f(\lambda) = 0_{\mathbb{k}} \Rightarrow r(\lambda) = 0_{\mathbb{k}} \Rightarrow r = 0_{\mathbb{k}[T]}$. $\square$

Definition Ein k1-Ring R heisst *Integritätsring*, falls $1_R \neq 0_R$ und für alle $a, b \in R$ gilt

$$a \cdot b = 0_R \Rightarrow a = 0_R \text{ oder } b = 0_R.$$

Beispiele (i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist Integritätsring.

(ii) Jeder Körper ist Integritätsring.

(iii) $(C_4, +, \cdot)$ ist kein Integritätsring, denn

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}, \quad \bar{2} \neq \bar{0}.$$

Lemma In jedem Integritätsring R gilt die "Kürzungsregel":

$$\left.\begin{array}{l} ab = ac \\ \text{mit } a \neq 0_R \end{array}\right. \Longrightarrow b = c.$$

Beweis Haben

$$ab = ac \iff a(b-c) = 0_R$$

$$\underset{R \text{ Int-Ring}}{\Longrightarrow} a = 0_R \text{ oder } b - c = 0_R.$$

Somit $b = c$. $\square$

Satz $\mathbb{k}$ Körper. Dann ist $\mathbb{k}[T]$ Integritätsring.

Beweis Angenommen $f \cdot g = 0_{\mathbb{k}[T]}$ mit $f \neq 0_{\mathbb{k}[T]}$ und $g \neq 0_{\mathbb{k}[T]}$. Dann:

$$f = a_n T^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu T^\nu \quad \text{mit } a_n \neq 0_{\mathbb{k}},$$

$$g = b_m T^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} b_\nu T^\nu \quad \text{mit } b_m \neq 0_{\mathbb{k}}.$$

Somit:

$$f \cdot g = \underbrace{a_n b_m}_{\neq 0_{\mathbb{k}}} T^{n+m} + \sum_{\nu=0}^{n+m-1} c_\nu T^\nu \neq 0_{\mathbb{k}[T]} \quad ↯ \quad \square$$

Bruchrechnen Betrachte $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$. Elemente von $\mathbb{Q}$ sind Brüche:

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0.$$

Haben

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$$

Konstruktion R Integritätsring. Äquivalenzrelation auf $R \times (R \setminus \{0_R\})$:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

$Q(R) :=$ Menge der Äquivalenzklassen. Setzen

$$\frac{a_1}{a_2} := \text{Äquivalenzklasse von } (a_1, a_2)$$
$$= \{(a_1', a_2') \in R \times (R \setminus \{0_R\});\ a_1 a_2' = a_2 a_1'\}.$$

Verknüpfungen auf $Q(R)$:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} := \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2 b_2},$$

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} := \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}.$$

Damit: $(Q(R), +, \cdot)$ Körper, der Quotientenkörper von R. Haben:

$$0_{Q(R)} = \frac{0_R}{1_R}, \qquad 1_{Q(R)} = \frac{1_R}{1_R}.$$

Beweis Zeigen: "$\sim$" ist Äquivalenzrelation.

Klar: Reflexivität, Symmetrie.

Transitivität: Seien $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ mit

$$① \ a_1 b_2 = a_2 b_1, \qquad ② \ b_1 c_2 = b_2 c_1.$$

Fall 1: $b_1 = 0$. Dann: $a_1 = c_1 = 0$. Somit

$$a_1 c_2 = a_2 c_1 \Rightarrow (a_1, a_2) \sim (c_1, c_2).$$

Fall 2: $b_1 \neq 0$. Dann:

$$① \cdot ②: \quad a_1 b_2 b_1 c_2 = a_2 b_1 b_2 c_1.$$

Kürzungsregel mit $b_1 b_2 \neq 0$:

$$a_1 c_2 = a_2 c_1 \Longrightarrow (a_1, a_2) \sim (c_1, c_2).$$

Zeigen: "$\cdot$" wohldef.. Seien $(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2')$ und $(b_1, b_2) \sim (b_1', b_2')$. Dann:

$$\begin{matrix} a_1 a_2' = a_2 a_1' \\ b_1 b_2' = b_2 b_1' \end{matrix} \Longrightarrow a_1 a_2' b_1 b_2' = a_2 a_1' b_2 b_1'.$$

Damit:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{a_1' b_1'}{a_2' b_2'} = \frac{a_1'}{a_2'} \cdot \frac{b_1'}{b_2'}.$$

$\square$

Bemerkung R Integritätsring und $Q(R)$ zugeh. Quotientenkörper. Haben injektiven Ringhom.:

$$R \longrightarrow Q(R), \quad a \mapsto \frac{a}{1_R}.$$

Definition $\mathbb{k}$ Körper. Körper der rationalen Funktionen in der Variablen T über $\mathbb{k}$:

$$\mathbb{k}(T) := Q(\mathbb{k}[T]).$$

Bemerkung Haben

$$\mathbb{k}(T) = \left\{ \frac{f}{g} \,;\, f, g \in \mathbb{k}[T],\ g \neq 0_{\mathbb{k}[T]} \right\}.$$

Fassen $\mathbb{k}[T]$ als Teilmenge von $\mathbb{k}(T)$ auf mittels

$$\mathbb{k}[T] \longrightarrow \mathbb{k}(T), \quad f \mapsto \frac{f}{1_{\mathbb{k}}}.$$

Beispielsweise:

$$\mathbb{Q}(T) \ni \frac{T^2-1}{T+1} = \frac{(T-1)(T+1)}{(T+1)}$$

$$= \frac{T-1}{1} \in \mathbb{Q}[T].$$