# Mathematische Physik I

Übungsblatt 2

**Aufgabe 4: Tangentialabbildung**

a) Sei $(\varphi, V)$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit $M$. Zeige, dass

$$T\varphi : TV = \bigcup_{x \in V} (\{x\} \times T_x M) \to \varphi(V) \times \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus ist.

b) i) Seien $M_1, M_2, M_3$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $k, l, n$ und $f : M_1 \to M_2$ sowie $g : M_2 \to M_3$ $C^1$-Abbildungen. Sei

$$T_x f := \Theta_{K_2}^{-1}(f(x)) \circ D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \Theta_{K_1}(x).$$

Zeige mittels dieser Definition, dass die Kettenregel

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

gilt.

ii) Sei $\psi : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Zeige, dass

$$T(\psi^{-1}) = (T\psi)^{-1}.$$

**Aufgabe 5: Tangentialbündel**
Sei $M$ eine $n$-dimensionale $C^\infty$-Mannigfaltigkeit und $TM$ das zugehörige Tangentenbündel.

a) Zeige, dass $M$ eine Untermannigfaltigkeit von $TM$ ist.

b) Zeige: $TM$ ist genau dann trivialisierbar, wenn es $n$ punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf $M$ gibt.

**Aufgabe 6: Lokaler Umkehrsatz**
Seien $M$ und $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $n$. Für ein $p \in M$ sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, so dass $Tf|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Zeige unter Verwendung des Umkehrsatzes im $\mathbb{R}^n$, dass es eine offene Umgebung $U \subset M$ von $p$ gibt, so dass $V := f(U)$ offen und $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 7: Die orthogonalen Matrizen als Mannigfaltigkeit**
Zeige, dass die orthogonalen Matrizen $\mathbb{O}(n) := \{Q \in \mathrm{GL}(n) \,|\, Q^T Q = \mathrm{Id}\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ von $\mathrm{GL}(n)$ bilden. Weiterhin gilt $T_Q\mathbb{O}(n) = \{B \,|\, (Q^{-1}B)^T = -Q^{-1}B\}$, insbesondere

$$T_{\mathrm{Id}}\mathbb{O}(n) \;=\; \{B \,|\, B^T = -B\} \;=:\; \mathrm{Schief}(n).$$

*Hinweis: Finde eine Abbildung $F : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Sym}(n)$ in die symmetrischen Matrizen Sym$(n)$ mit $F^{-1}(0) = \mathbb{O}(n)$ und verwende die Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten und ihrer Tangentialräume über eine solche Abbildung.*