Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 7*, 28.05.2010

Aufgabe 7.1. Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Beweise, dass $TN \subset TM$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 7.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

(a) Finde ein C^∞ Vektorfeld X auf S^n mit $X_p \neq 0$ für alle $p \in S^n$.

(b) Finde C^∞ Vektorfelder X, Y und Z auf S^3 mit der Eigenschaft, dass $\{X_p, Y_p, Z_p\}$ eine Basis von T_pS^3 für alle $p \in S^3$ ist.

Hinweis: Um Vektorfelde auf S^n explizit anzugeben kann es hilfsreich sein, TS^n als Untermannigfaltigkeit von $T\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ zu betrachten (siehe obige Aufgabe).

Aufgabe 7.3. Benutze das Vektorfeld $X : S^1 \to TS^1$ aus der obigen Aufgabe um einen Diffeomorphismus $h : S^1 \times \mathbb{R} \to TS^1$ zu konstruieren, der die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $\pi \circ h(x, v) = x$ für alle $(x, v) \in S^1 \times \mathbb{R}$,

(b) $h(p, -) : \mathbb{R} \to T_pS^1$ ist ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus.

(In anderen Worten: h ist ein Diffeomorphismus und ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorbündeln.) Sei $k \in \mathbb{Z}$, und sei $f_k : S^1 \to S^1$ durch $f_k(z) = z^k$ (Potenz von z als komplexe Zahl) definiert. Bestimme $df_k : TS^1 \to TS^1$ (oder $h^{-1} \circ df_k \circ h : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$).

Aufgabe 7.4. Seien M und N zwei C^∞ Mannigfaltigkeiten. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $(p, q) \in M \times N$ sind $T_pM \times T_qN$ und $T_{(p,q)}(M \times N)$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume kanonisch isomorph.

(b) Ein kanonischer Diffeomorphismus und Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorbündeln

$$TM \times TN \to T(M \times N)$$

existiert.

Aufgabe 7.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X ein C^∞ Vektorfeld auf S^n. Beweise, dass ein C^∞ Vektorfeld $\widetilde{X}$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ existiert, mit $X = \widetilde{X}|_{S^n}$.

*Abgabe: Montag 7.06.2010 vor der Vorlesung. Die Aufgabe 7.5 wird nicht bewertet.
`http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html`