LEHRSTUHL II FÜR MATHEMATIK
DER RHEINISCH – WESTFÄLISCHEN
TECHNISCHEN HOCHSCHULE AACHEN
Prof. Dr. Eberhard Triesch

Aachen, den 30.07.2002

Klausur zur Vorlesung Höhere Mathematik I — Herbst 2002

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Ungleichung definiert?

$$|x-1| < \frac{x^2-5x-4}{x+2}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \geq 2$ folgende Gleichung gilt.

$$\sum_{k=2}^{n} k\left(2^k + (-1)^k\right) = \frac{3}{4} + (n-1)2^{n+1} + (-1)^n \frac{2n+1}{4}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $M(\mathcal{E}_3, f, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass f eine Drehung ist.
b) Bestimmen Sie die Drehachse von f.
c) Erzeugen Sie aus der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ nach dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren eine orthonormierte Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 5. \quad (*)$$

a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die Gleichung $(*)$ äquivalent ist mit $x^T A x = 5$, falls $x = (x_1,\, x_2)^T$.
b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix A.
c) Wie sieht die Normalform der Kurve $(*)$ aus? Geben Sie ebenfalls den Typ der Kurve $(*)$ an.
d) Zeichnen Sie die Kurve.