6 Etwas Fehlerrechnung

Grundlagen Numerik – vermeidbarer Verlust von Genauigkeit in quadratischen Gleichungen – Berechnung von π als Beispiel – Verwendung der Reihendefinition elementarer Funktionen

6.1 Wurzelfunktion

Die Taylorreihe der Wurzelfunktion beginnt

$$\sqrt{1+\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \varepsilon^k = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \pm \ldots$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k-1} \cdot \frac{\alpha-(k-1)}{k},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \binom{\frac{1}{2}}{2} = \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}, \binom{\frac{1}{2}}{3} = \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16}, \ldots$$

Im Gleitkommaformat fallen für kleines ε, z.B. $\varepsilon = 1.2345678 \cdot 10^{-12}$, die letzten Stellen von $1+\varepsilon$ weg, bei 16 Stellen Genauigkeit bleiben also im Beispiel 4 Dezimalstellen übrig. Dann hat auch

$$\sqrt{1+\varepsilon} - 1 = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \pm \ldots$$

eine reduzierte Genauigkeit. Dieser Genauigkeitsverlust ist nicht notwendig. Der äquivalente Ausdruck

$$\sqrt{1+\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}+1}$$

erhält die maximal mögliche Genauigkeit von ε. Anwendung in Additionstheoremen und allgemeiner quadratischen Gleichungen.

6.2 Berechnung von π – Archimedes

Bestimme Fläche bzw. Umfang regelmäßiger n-Ecke im Einheitskreis als Näherungen für π bzw. 2π.

Starte mit dem 6-Eck und konstruiere die Winkelhalbierenden, um zum 12-Eck, 24-Eck etc. zu gelangen. Teile die n–Ecke in n Tortenstücken ein.

Erinnerung: $\sin(30^o) = \frac{1}{2} = \cos(60^o)$, $\sin(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^o)$.

Jedes Tortenstück ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ in der Spitze und anliegenden Seiten der Länge 1. Es kann in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel $\alpha/2$ im mittigen Winkel und Hypotenuse 1 zerlegt werden, die anderen Seiten haben also die Längen $\sin(\alpha/2)$ und $\cos(\alpha/2)$.

$$\Longrightarrow \text{Fläche} = 2 \cdot \frac{1}{2}\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)$$

Die Fläche des n-Ecks ist dann $A_n = \frac{n}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Die Außenseite des Tortenstücks hat Länge $2\sin(\alpha/2)$ für einen Umfang des n-Ecks von $U_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Analytischer Übergang zum halben Winkel: Additionstheorem – Sinus des Doppelwinkels:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\sin(\alpha)\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ s &= 2x\sqrt{1-x^2} \\
s^2 &= 4x^2(1-x^2) = 2\,(2x^2) - (2x^2)^2 \\
1-s^2 &= (1-2x^2)^2 \\
\sqrt{1-s^2} &= 1-2x^2 \\
x &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-s^2}}{2}} = \frac{s}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-s^2})}}
\end{aligned}$$

Starte mit $\alpha_0 = 30^o = \frac{2\pi}{12}$, d.h. einem 12-Eck. Bestimme Sinus $s_m = \sin(\alpha_m)$ vom Winkel $\alpha_m = \frac{2\pi}{12 \cdot 2^m}$ des $(12 \cdot 2^m)$–Ecks durch fortlaufendes Halbieren mit jeder Variante der Formel. Gesamtfläche ist dann $A_m = 6 \cdot 2^m * s_m$.

3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 …

Naive Implementation

Nr.	Seiten	Fläche
1,	24,	**3.1**058285412302498
2,	48,	**3.1**32628613281237
3,	96,	**3.1**39350203046872
4,	192,	**3.141**03195089053
5,	384,	**3.141**4524722853443
6,	768,	**3.1415**57607911622
7,	1536,	**3.1415**83892148936
8,	3072,	**3.14159**04632367617
9,	6144,	**3.141592**1060430483
10,	12288,	**3.141592**5165881546
11,	24576,	**3.1415926**186407894
12,	49152,	**3.1415926**453212157
13,	98304,	**3.1415926**453212157
14,	196608,	**3.1415926**453212157
15,	393216,	**3.1415926**453212157
16,	786432,	**3.14159**3669849427
17,	1572864,	**3.141592**3038117377
18,	3145728,	**3.1416**086962248038
19,	6291456,	**3.1415**868396550413
20,	12582912,	**3.141**6742650217575
21,	25165824,	**3.141**6742650217575
22,	50331648,	**3.14**30727401700396
23,	100663296,	**3.1**598061649411346
24,	201326592,	**3.1**81980515339464
25,	402653184,	**3**.3541019662496847
26,	805306368,	4.242640687119286
27,	1610612736,	6.0
28,	3221225472,	0.0

mit Binomialtrick

Nr.	Seiten	Fläche
1,	24,	**3.1**05828541230249
2,	48,	**3.1**326286132812378
3,	96,	**3.1**393502030468667
4,	192,	**3.141**0319508905093
5,	384,	**3.141**4524722854615
6,	768,	**3.1415**576079118575
7,	1536,	**3.1415**838921483177
8,	3072,	**3.14159**04632280496
9,	6144,	**3.141592**105999271
10,	12288,	**3.141592**5166921563
11,	24576,	**3.1415926**19365383
12,	49152,	**3.1415926**450336897
13,	98304,	**3.14159265**14507664
14,	196608,	**3.141592653**055036
15,	393216,	**3.141592653**456103
16,	786432,	**3.1415926535**5637
17,	1572864,	**3.14159265358**1437
18,	3145728,	**3.14159265358**77032
19,	6291456,	**3.141592653589**27
20,	12582912,	**3.141592653589**6617
21,	25165824,	**3.141592653589**7594
22,	50331648,	**3.141592653589**7842
23,	100663296,	**3.1415926535897**905
24,	201326592,	**3.1415926535897**922
25,	402653184,	**3.141592653589793**
26,	805306368,	**3.141592653589793**
27,	1610612736,	**3.141592653589793**
28,	3221225472,	**3.141592653589793**

6.3 Berechnung von π – Leibniz und andere

Die Diagonale hat einen Winkel von 45^o zur x-Achse, d.h. $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$

Arcus-Tangens-Reihenentwicklung

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^2 \pm \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

Das ist eine alternierende Reihe ähnlich der alternierenden harmonischen Reihe. Der Grenzwert befindet sich nach Leibniz immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen s_{n-1} und s_n. Deren Abstand ist $1/(2n+1)$, was auch die Konvergenzgeschwindigkeit ergibt.

Konvergenzbeschleunigung durch Vergleich mit einer nahe liegenden Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots \\ &= 1 - \frac{2}{3\cdot 5} - \frac{2}{7\cdot 9} - \dots - \frac{2}{(4n-1)\cdot(4n+1)} - \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} \pm \dots \\ &= \frac{4}{2\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 10} + \dots + \frac{4}{(4n-2)(4n+2)} + \dots\end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{6}{6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \dots + \frac{6}{(4n-2)(4n-1)(4n+1)(4n+2)} + \dots,$$

hat Konvergenzgeschwindigkeit proportional zu $1/n^3$.

Zusammensetzen des Winkels über komplexe Zahlen

$\dfrac{\pi}{4} = 45^o$ ist der Winkel von $1+i$. Faktorisiere $1+i$ in Zahlen mit kleineren Winkeln:

Euler: $(2+i)(3+i) = 5(1+i)$, d.h.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$$

nächstgrößere Variante: $(3+i)^2(7+i) = 2(4+3i)(7+i) = 50(1+i)$, d.h.

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$$

Potenzen von $4+i$ liefern keinen schönen Restfaktor, betrachte $5+i$

$$(5+i)^2 = 24+10i = 2(12+5i) \qquad \text{Anstieg kleiner } 1/2$$

$$(12+5i)^2 = 119+120i \qquad \text{Anstieg etwas größer als 1}$$

$$\frac{1+i}{119+120i} \sim (1+i)(119-120i) = 239-i$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \qquad \text{John Machin (1706)}$$

6.4 Quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
& 0 = ax^2 + bx + c, && a \neq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 0 = (2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac \\
\Longleftrightarrow\ & 0 = (2ax+b)^2 - (b^2-4ac) \iff x_{1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right) & \text{wenn } b^2-4ac \geq 0 \\ \frac{1}{2a}\left(-b \pm i\sqrt{|b^2-4ac|}\right) & \text{wenn } b^2-4ac < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ergibt Probleme, wenn $|ac|$ sehr klein ist gegen b^2.

$a = 1$, $b = 1$, $c = 10^{-k}$, $k = 14, 15, 16, \ldots$

Alternative Formel im reellen Fall:

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right) \\
&= \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}
\end{aligned}$$

also stabiler:

$$\begin{aligned}
y &= -b - sign(b)\sqrt{b^2-4ac}, \\
x_1 &= \frac{y}{2a}, \\
x_2 &= \frac{2c}{y}
\end{aligned}$$